Chapitre II : Espaces vectoriels

I) Motivation :

Quelques propriétés du plan vectoriel $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \text{ tq } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$:

* La somme de deux vecteurs est un vecteur
$$(x,y) + (z,t) = (x+z, y+t)$$

* Il y a un "vecteur nul" : le vecteur $(0,0)$
$$(x,y) + (0,0) = (0,0) + (x,y) = (x,y)$$

* On peut multiplier un vecteur par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$\alpha.(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

De nombreux ensembles mathématiques ont la même structure et leurs éléments se comportent comme des vecteurs :

<u>Exemples</u>:

1) $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$ où I = intervalle de $\mathbb{R}$.

* $f, g \in E \Rightarrow f+g \in E$ est la fonction $f+g : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)+g(x) \end{array}$

* "vecteur nul" : la fonction nulle $\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$

* $f \in E, \alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha f \in E$ est la fonction $\alpha f : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha f(x) \end{array}$

2) $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les matrices de taille $n \times p$ à coeff dans $\mathbb{K}$.

* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \Rightarrow A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
* vecteur nul = la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha.A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Un espace vectoriel est une structure algébrique abstraite qui permet de regrouper tous ces cas de figures pour les étudier.

I) Structure d'espace vectoriel :

1) Structure de groupe :

Def : Soit G un ensemble muni d'une loi interne notée $*$.

$$G \times G \to G$$
$$(x,y) \longmapsto x*y$$

On dit que $(G,*)$ est un groupe si :

1) La loi $*$ est associative

$$(x*y)*z = x*(y*z), \quad \forall x,y,z \in G$$

2) $\exists e \in G$ tq :

$$e*x = x*e = x, \quad \forall x \in G$$

e s'appelle l'élément neutre

3) $\forall x \in G, \exists y \in G$ tq $x*y = y*x = e$.

y s'appelle l'inverse de x, on le note x^{-1} (ou éventuellement $-x$)

Exemples :

1) $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe :

i) $+$ est associative : $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$

ii) 0 est l'élément neutre : $\forall x \in \mathbb{Z}$, $0+x = x+0 = x$.

iii) l'inverse de $x \in \mathbb{Z}$ est $-x$.

De même $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{C},+)$ sont des groupes.

⚠ $(\mathbb{N},+)$ n'est pas un groupe.

2) $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe :

i) $\times$ est associative, $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*$

ii) 1 est l'élément neutre.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, l'inverse de x pour $\times$ est $\frac{1}{x}$.

3) $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +)$ est un groupe.

i) $+$ est associative

ii) La fonction nulle est l'élément neutre

iii) L'inverse d'une fonction f est la fonction $-f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -f(x) \end{array}$

4) $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe.

<u>Définition.</u> On dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif (ou abélien) si la loi $*$ est commutative i.e :

$$x * y = y * x, \quad \forall x, y \in G.$$

Les exemples ci-dessus sont des groupes commutatifs.

<u>Exemple de groupe non commutatif :</u>

Soit E un ensemble et $G = \{\text{bijections de } E \text{ dans } E\}$.

Alors $(G, \circ)$ est un groupe en général non commutatif :

i) $\circ$ est associative ; $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \quad \forall f, g, h \in G$

ii) Id_E est l'élément neutre : $\forall f \in G$, $f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$

iii) $\forall f \in G$, f admet un inverse pour la loi $\circ$ qui est f^{-1} la bijection réciproque de f.

Rappels :

Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$

i) On dit que f est <u>injective</u> si :

$$\forall x, y \in E, \left(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \right)$$

(déf équivalente : $\forall x, y \in E, \left(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \right)$)

ii) On dit que f est <u>surjective</u> si

Pour tout $z \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$.

iii) On dit que f est bijective si elle est injective et surjective.

<u>Résumé</u> : Une application $f : E \to F$ est

i) injective si tout élément de F a <u>au plus</u> un antécédent dans E par f.

ii) surjective si tout élément de F a <u>au moins</u> un antécédent dans E par f

iii) bijective si tout élément de F a exactement un antécédent dans E par f

Pour $E = \{a, b, c\}$ et $f : \begin{array}{l} E \to E \\ a \mapsto b \\ b \mapsto c \\ c \mapsto a \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} E \to E \\ a \mapsto c \\ b \mapsto b \\ c \mapsto a \end{array}$

Alors $f \circ g : \begin{array}{l} a \mapsto a \\ b \mapsto c \\ c \mapsto b \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{l} a \mapsto b \\ b \mapsto a \\ c \mapsto c \end{array}$ donc $f \circ g \neq g \circ f$

<u>Propriétés :</u> Soit $(G, *)$ un groupe. Alors :

(i) L'élément neutre est unique

(ii) $\forall x \in G$, l'inverse de x est unique

(iii) $\forall x, y, z \in G$, $\quad x * y = x * z \Rightarrow y = z$

<u>Preuve :</u>

(i) Supposons que e et e' sont des éléments neutres.

$$\left.\begin{array}{l} e * e' = e \\ e * e' = e' \end{array}\right\} \Rightarrow e = e'$$

(ii) Supposons que x a deux inverses y et z :

$$\begin{cases} x * y = y * x = e \\ x * z = z * y = e \end{cases}$$

Alors : $\left.\begin{array}{l} (y * x) * z = e * z = z \\ y * (x * z) = y * e = y \end{array}\right\}$ par associativité $y = z$

(iii) $x * y = x * z$

$\Rightarrow x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * (x * z)$

$\Rightarrow (x^{-1} * x) * y = (x^{-1} * x) * z$

$\Rightarrow e * y = e * z$

$\Rightarrow y = z$

2) Structure d'espace vectoriel.

Déf: Soit $\mathbb{K}$ le corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

Une loi interne $+$: $E \times E \longrightarrow E$
$(x,y) \longmapsto x+y$

Une loi externe $\cdot$: $(\mathbb{K}, E) \longrightarrow E$
$(\alpha, x) \longmapsto \alpha \cdot x$

On dit que E muni de ces deux lois est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-ev) si :

(1) $(E,+)$ est un groupe commutative

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E$: $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

(3) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E$: $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

(4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E$: $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) = \beta \cdot (\alpha \cdot x)$

(5) $\forall x \in E$: $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Dans un premier temps on notera 0_E l'élément neutre du groupe $(E,+)$ à ne pas confondre avec le scalaire $0_{\mathbb{K}}$.

Vocabulaire. Les éléments de E s'appellent les vecteurs. Les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent les scalaires.

Exemples:

1) $(\mathbb{K}, +, \times)$ est lui-même un $\mathbb{K}$-ev

(i) $(\mathbb{K},+)$ est un groupe commutatif

(ii) $\forall (\alpha, x, y) \in \mathbb{K}^3$, $\alpha \times (x+y) = \alpha \times x + \alpha \times y$

(iii) $\forall (\alpha,\beta,x) \in \mathbb{K}^3 : \quad (\alpha+\beta)\times x = \alpha\times x + \beta\times x$

(iv) $\forall (\alpha,\beta,x) \in \mathbb{K}^3 : \quad (\alpha\beta)\times x = \alpha\times(\beta\times x) = \beta\times(\alpha\times x)$

(v) $\forall x \in \mathbb{K}, \quad 1_{\mathbb{K}} \times x = x.$

2) Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ alors $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-ev :
$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-ev.

3) Exemple fondamental : $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev

$\mathbb{K}^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n)$ avec $a_i \in \mathbb{K} \ \forall i \in [\![1,n]\!] \}$.

La loi $+$: $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$

La loi $\cdot$: $\alpha\cdot(a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$

Vérifions que $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev :

(i) $(\mathbb{K}^n, +)$ est un groupe commutatif
+ est interne, associative, commutative
$(0, \dots, 0)$ est l'élément neutre
l'inverse de $(a_1, \dots, a_n)$ est $(-a_1, \dots, -a_n)$

(ii) Soit $x = (a_1, \dots, a_n)$; $y = (b_1, \dots, b_n)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
\alpha\cdot(x+y) &= \alpha\cdot(a_1+b_1, \dots, a_n+b_n) \\
&= (\alpha(a_1+b_1), \dots, \alpha(a_n+b_n)) \\
&= (\alpha a_1 + \alpha b_1, \dots, \alpha a_n + \alpha b_n) \\
&= \alpha(a_1, \dots, a_n) + \alpha\cdot(b_1, \dots, b_n) \\
&= \alpha\cdot x + \alpha\cdot y
\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\cdot x &= (\alpha+\beta)\cdot(a_1, \dots, a_n) \\
&= ((\alpha+\beta)a_1, \dots, (\alpha+\beta)a_n) \\
&= (\alpha a_1 + \beta a_1, \dots, \alpha a_n + \beta a_n) \\
&= (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n) + (\beta a_1, \dots, \beta a_n) \\
&= \alpha\cdot(a_1, \dots, a_n) + \beta\cdot(a_1, \dots, a_n) \\
&= \alpha\cdot x + \beta\cdot x
\end{aligned}$$

(iv) $(\alpha\beta).x = (\alpha\beta).(a_1,\dots,a_n)$
$= (\alpha\beta a_1,\dots,\alpha\beta a_n)$
$= \alpha.(\beta a_1,\dots,\beta a_n)$
$= \alpha.(\beta.(a_1,\dots,a_n))$
$= \alpha.(\beta.x) = \beta.(\alpha.x)$

(v) $1.x = 1.(a_1,\dots,a_n) = (1\times a_1,\dots,1\times a_n) = (a_1,\dots,a_n) = x$

<u>exemples:</u> $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$ sont des $\mathbb{R}$-ev, $\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3$ sont des $\mathbb{C}$-ev.

4) $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ muni des lois :

$+ : (f,g) \mapsto f+g$ avec $f+g : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)+g(x) \end{array}$

$\cdot : (\alpha,f) \mapsto \alpha.f$ avec $\alpha.f : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha f(x) \end{array}$

est un $\mathbb{R}$-ev.

$\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-ev

$P(x) = \underbrace{a_0}_{\in\mathbb{K}} + a_1 x + \dots + \underbrace{a_n}_{\in\mathbb{K}} x^n$

5) L'ens. des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$: $(\mathbb{K}[X],+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev :

$+ : (P,Q) \mapsto P+Q$
$\cdot : (\alpha,P) \mapsto \alpha P$

6) $(M_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev
7) L'ens. des suites réelles est un $\mathbb{R}$-ev.

<u>Proposition</u> (Premières propriétés) Soit E un $\mathbb{K}$-ev

(i) $\forall x\in E,\ 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
(ii) $\forall \alpha\in\mathbb{K},\ \alpha.0_E = 0_E$
(iii) $\forall \alpha\in\mathbb{K}, \forall x\in E,\ (\alpha.x = 0_E \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0_E)$
(iv) $\forall \alpha\in\mathbb{K}, \forall x,y\in E,\ \alpha.(x-y) = \alpha.x - \alpha.y$
(v) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}, \forall x\in E,\ (\alpha-\beta).x = \alpha.x - \beta.x$

⚠ Ne pas confondre $0_{\mathbb{K}}$ et 0_E.

Pour $E = \mathbb{K}^n$. $0_{\mathbb{K}} = 0$ et $0_E = (0, \dots, 0)$

Pour $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. $0_{\mathbb{K}} = 0$ et $0_E =$ la fonction nulle.

3) Combinaisons linéaires :

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev

1) Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_n)$ tout vecteur x de E qui peut s'écrire sous la forme :

$$x = \alpha_1 . x_1 + \alpha_2 . x_2 + \dots + \alpha_n . x_n \text{ avec } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

On note $\text{vect}(\{x_1, \dots, x_n\})$ ou $\text{vect}(x_1, \dots x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_1, \dots, x_n)$

2) Soit F une partie de E. On note $\text{vect}(F)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de F.

Exemples :

1) $E = \mathbb{R}^2$, $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$

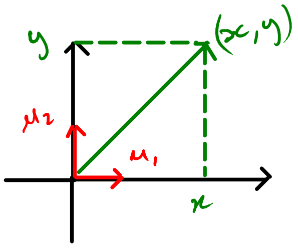
$$\begin{aligned}
\text{Vect}(u_1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tq } (x,y) = \alpha . u_1\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tq } (x,y) = (\alpha, 0)\} \\
&= \{(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{l'axe des absisses}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \exists (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y) = \alpha_1 . u_1 + \alpha_2 . u_2 \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \exists (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y) = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) \}$$

$$= \{ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } \alpha_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \mathbb{R}^2$$



2) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $y_1 = \sin$ et $y_2 = \cos$.

$$\mathrm{Vect}(y_1, y_2) = \{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } \exists (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \underbrace{y = \alpha_1 \sin + \alpha_2 \cos}_{\iff \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \alpha_1 \sin(x) + \alpha_2 \cos(x)} \}$$

III) Sous-espaces vectoriels

1) Définitions et exemples.

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$.

On dit que F est sous-espace vectoriel (sev) de E si

(i) $0_E \in F$

(ii) $\forall (x,y) \in F^2$, $x + y \in F$

(iii) $\forall x \in F$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha . x \in F$

On a la définition équivalente :

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$.

On dit que F est un sev de E si :

(1) $0_E \in F$

(2) $\forall (x,y) \in F^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha . x + y \in F$

En effet : (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (2), (2) avec $\alpha = 1$ $\Rightarrow$ (ii), (2) avec $y = 0$ $\Rightarrow$ (iii)

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E, alors :

1) F est stable par combinaisons linéaires
2) Muni des lois $+, \cdot$ de E, F est un $\mathbb{K}$-ev

Preuve : 1) découle de la définition
2) par 1) $+$ est une loi interne dans F, $\cdot$ est une loi externe et ttes les autres pté's sont vérifiées.

Exemples :

1) $\{0_E\}$ et E sont des sev de E

2) $\mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n)$ où $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est un sev de E.
En effet : (1) $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot x_1 \in \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n)$
(2) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, $y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$
alors $\lambda . x + y = \lambda . (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) + (\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)$
$= \lambda\alpha_1 . x_1 + \lambda\alpha_2 . x_2 + \dots + \lambda\alpha_n x_n + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$
$= (\lambda\alpha_1 + \beta_1) . x_1 + \dots + (\lambda\alpha_n + \beta_n) . x_n$
$\in \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n)$

3) $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, alors F est un sev de E.
(1) $0_E =$ la fonction nulle est une fonction continue donc $0_E \in F$
(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall f, g$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + g$ est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.

$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$ avec $a_p \neq 0$ alors $\deg P = p$

4) $E = \mathbb{K}[X]$ et $F = \mathbb{K}_n[X]$ (polynômes de degré $\leq n$)
(i) $0_E =$ le polynôme nul, $\deg 0_E = -\infty \leq n$. donc $0_E \in F$
(ii) $\forall P, Q \in F$, $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q) \leq n$ donc $P+Q \in F$
(iii) $\forall P \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\deg(\lambda P) = -\infty$ ou $\deg P$ donc $\lambda P \in F$.

Contre - exemple :

$E = \mathbb{R}^2 = \{(x,y)$ avec $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

$F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $x + y = 1 \}$.

On a $F \subset E$ mais n'est pas un sous espace vectoriel.

Soit (x,y) et (z,t) dans F. Alors $x+y = 1$ et $z+t = 1$.

Mais $(x,y)+(z,t) = (x+z, y+t) \notin F$ car : $(x+z)+(y+t) = 2$.

5) E = l'ens. des suites réelles. F = l'ens. des suites arithmétiques.

(i) La suite nulle est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 0.

(ii) $u_n = u_0 + nr, \forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = v_0 + nr'$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

alors $u_n + v_n = u_0 + v_0 + n(r + r')$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $u_n = u_0 + nr$, $\lambda u_n = \lambda u_0 + n(\lambda r)$.

2) Sev engendré par une partie.

Prop : L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev est un sous-espace vectoriel.

Preuve : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E.

(i) $0_E \in F_i, \forall i \in I$ donc $0_E \in \bigcap_{i \in I} F_i$

(ii) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Alors $\forall i \in I$, $\alpha . x + y \in F_i$ car F_i est un sev

donc $\alpha . x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

Déf : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A une partie de E. On appelle sev engendré par A et on note $\langle A \rangle$ l'intersection de tous les sev de E contenant A. Il s'agit du plus petit (pour l'inclusion) sev de E contenant A.

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$ev et A une partie de E. Alors

$$\langle A \rangle = \mathrm{vect}(A)$$

le plus petit sev de E contenant A est l'ens. des combinaisons linéaires de vecteurs de A.

Preuve :

$= \{ x \in E \text{ tq } x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \text{ avec } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, (x_1, \dots, x_n) \in A^n \}$

* $\text{vect}(A)$ est un sev de E contenant A. Or $\langle A \rangle$ est le plus petit sev de E contenant A donc $\langle A \rangle \subset \text{vect}(A)$.

* Montrons que $\text{vect}(A) \subset \langle A \rangle = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$. Par cela mq pour tout F sev de E contenant A, on a $\text{vect}(A) \subset F$.

Soit donc F un sev de E contenant A, quelconque.

Soit $x \in \text{vect}(A)$. $x = \alpha_1 . \underbrace{x_1}_{\in A} + \dots + \alpha_n \underbrace{x_n}_{\in A} \in A$ donc $x \in F$, donc $\text{vect}(A) \subset F$.

Exemples :

1) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

L'ens. des fonctions polynomiales $= \text{vect}(\{ x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N} \})$

2) Si $A = \emptyset$, par convention, $\text{vect}(\emptyset) = \{ 0_E \}$

3) $\text{vect}(A) = A \iff A$ est un sev de E.

Par exemple :

$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x + y + z = 0 \}$ (plan orthogonal à $\vec{n} = (1,1,1)$)

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in A &\iff x + y + z = 0 \\
&\iff z = -x - y \\
&\iff (x,y,z) = (x, y, -x-y) \\
&\iff (x,y,z) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1) \\
&\iff (x,y,z) \in \text{vect}\{ (1,0,-1) ; (0,1,-1) \}
\end{aligned}$$

Donc A est un sev de E et $A = \text{vect}\{ (1,0,-1) ; (0,1,-1) \}$

3) Somme de sous-espaces vectoriels :

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Déf : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G deux sev de E. On définit

$$F+G = \{x \in E \text{ tq } \exists (x_F, x_G) \in F \times G \text{ tq } x = x_F + x_G\}$$

= ens. de vecteurs de E qui s'écrivent comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. Alors :

(i) $F+G$ est un sev de E

(ii) $F+G = \text{Vect}(F \cup G)$

Preuve :

(i) * $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ donc $0_E \in F+G$

* Soit $x = x_F + x_G \in F+G$, $y = y_F + y_G \in F+G$, $\alpha \in \mathbb{K}$ $\Rightarrow$ $\alpha . x + y = \alpha.(x_F + x_G) + (y_F + y_G)$

$$= \underbrace{(\alpha x_F + y_F)}_{\in F \text{ car } F \text{ sev}} + \underbrace{(\alpha x_G + y_G)}_{\in G \text{ car } G \text{ sev}}$$

Donc $\alpha x + y \in F+G$.

(ii) Soit $x \in F+G$, $x = x_F + x_G$ donc x est combinaison linéaire de vecteurs de $F \cup G$ donc $x \in \text{Vect}(F \cup G)$ $\rightsquigarrow$ $F+G \subset \text{Vect}(F \cup G)$.

Soit $x \in F \cup G$. Si $x \in F$: $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_G}_{\in G}$ donc $x \in F+G$

Si $x \in G$: $x = \underbrace{0_F}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$ donc $x \in F+G$

donc $F \cup G \subset F+G$ et $F+G$ est un sev donc $\text{Vect}(F \cup G) \subset F+G$.

On peut généraliser à $E_1, \dots, E_n$ n sev de E :

$$E_1 + \dots + E_n = \{x = x_1 + \dots + x_n,\ x_i \in E_i\ \forall i \in [\![1, n]\!]\}.$$

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et soit F et G deux sev de E.
On dit que F et G sont en somme directe si pour tout vecteur x de $F+G$, il existe une unique décomposition

$$x = x_F + x_G \quad \text{avec } x_F \in F \text{ et } x_G \in G.$$

On note alors $F \oplus G$ au lieu de $F+G$.

Prop : E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. Alors :

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \iff F \cap G = \{0_E\}$$

Preuve :

($\Rightarrow$) Supposons que F et G sont en somme directe. Soit $x \in F \cap G$.
On peut écrire $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$.

Par unicité de la décomposition on a $x = 0_E$.
Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $x \in F+G$ admettant 2 décompositions :

$$x = x_F + x_G = y_F + y_G.$$

Donc $x_F - y_F = y_G - x_G$.

Posons $z = x_F - y_F = y_G - x_G$. Alors $z \in F$ et $z \in G$.

Donc $z \in F \cap G$ donc $z = 0_E$. Donc $x_F = y_F$ et $x_G = y_G$.

Donc la décomposition de x est unique. Donc F et G sont en somme directe.

Déf : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G deux sev de E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$
c-a-d que tout vecteur de E se décompose de manière unique comme un vecteur de F plus un vecteur de G.

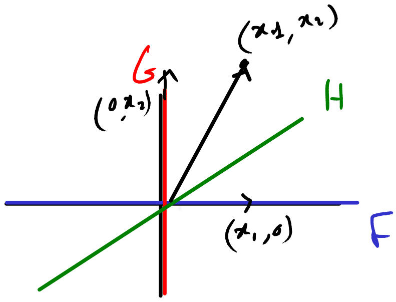
Pour vérifier que $E = F \oplus G$ il faut et il suffit de vérifier :

(i) $F \cap G = \{0_E\}$ donc F et G sont en somme directe

(ii) $\forall x \in E, \exists (x_F, x_G) \in F \times G$ tq $x = x_F + x_G$.

En général il est plus difficile de montrer (ii) que (i).

Exemples :



1) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \text{vect}((1,0)) = \{(\alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$
$G = \text{vect}((0,1)) = \{(0, \mu), \mu \in \mathbb{R}\}$
$H = \text{vect}((1,1)) = \{(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

* Montrons que $E = F \oplus G$.

(i) Soit $x \in F \cap G$. $x = (x_1, x_2)$. $x \in F$ donc $x_2 = 0$. $x \in G$ donc $x_1 = 0$
Donc $x = (0,0)$. Donc $F \cap G = \{(0,0)\}$.

(ii) Soit $x = (x_1, x_2) \in E$. Alors
$x = (x_1, x_2) = \underbrace{(x_1, 0)}_{\in F} + \underbrace{(0, x_2)}_{\in G}$ donc $x \in F + G$

Conclusion $E = F \oplus G$.

* Montrons que $E = F \oplus H$.

(i) Soit $x=(x_1,x_2)\in F\cap H$. Comme $x\in F$, $x_2=0$. Comme $x\in H$, $x_1=x_2=0$.

Donc $x=(0,0)=0_{\mathbb{R}^2}$. Donc $F\cap H=\{(0,0)\}$.

(ii) Soit $x=(x_1,x_2)\in E$. On peut écrire

$$x=(x_1,x_2)=\underbrace{(\lambda,0)}_{\in F}+\underbrace{(\alpha,\alpha)}_{\in H} \text{ avec } \begin{cases}\lambda+\alpha=x_1\\ \alpha=x_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=x_2\\ \lambda=x_1-x_2\end{cases}$$

$$x=(x_1,x_2)=(x_1-x_2,0)+(x_2,x_2)$$

Donc $E=F\oplus H$.

<u>Remarque</u>: Le supplémentaire d'un sous-espace vectoriel <u>n'est pas unique</u> !

2) $E=\mathbb{R}^2$, $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ et $b=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$ deux vecteurs non colinéaires ie $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

Alors $E=\mathrm{vect}(a)\oplus\mathrm{vect}(b)$.

(i) Montrons que $\mathrm{vect}(a)$ et $\mathrm{vect}(b)$ sont en somme directe.

Soit $x\in\mathrm{vect}(a)\cap\mathrm{vect}(b)$. Alors $x=\lambda a=\mu b$ avec λ et $\mu\in\mathbb{R}$.

Si $\lambda\neq 0$ alors $a=\dfrac{\mu}{\lambda}b$ donc a et b sont colinéaires : contradiction. Donc $\lambda=0$.

Donc $x=0$. Conclusion : $\mathrm{vect}(a)\cap\mathrm{vect}(b)=\{(0,0)\}$.

(ii) Montrons que $\forall x\in\mathbb{R}^2$, $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$ tq $x=\lambda a+\mu b$.

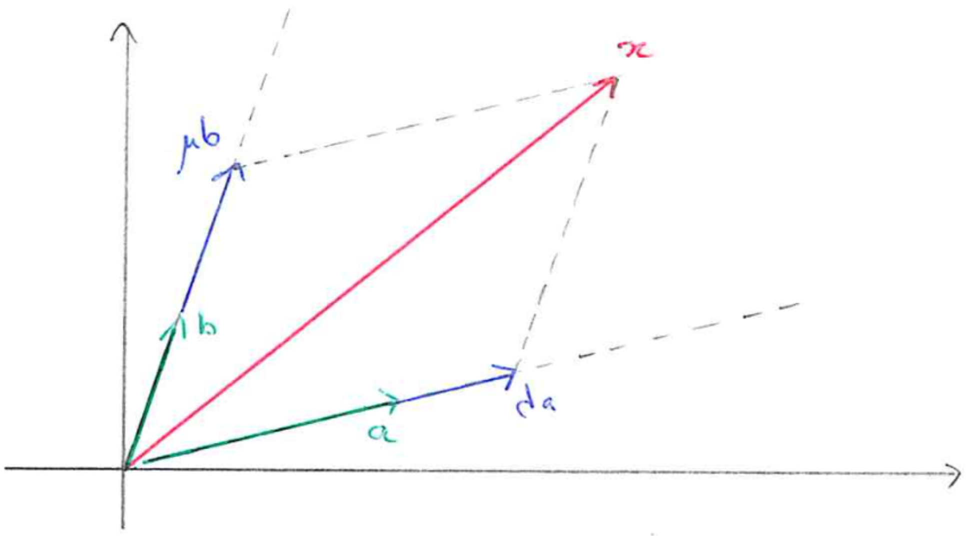
Soit $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, on cherche λ et μ tq $(x_1,x_2)=\lambda(a_1,a_2)+\mu(b_1,b_2)$

$$\begin{cases}x_1=\lambda a_1+\mu b_1\\ x_2=\lambda a_2+\mu b_2\end{cases}\quad \begin{vmatrix}\times\, b_2\\ \times\,(-b_1)\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}\times\, a_2\\ \times\, -a_1\end{vmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\lambda=\dfrac{x_1b_2-x_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}\\[2ex] \mu=-\dfrac{x_1a_2-x_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\end{cases}$$

or $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ car a et b non colinéaires donc λ et μ existent.

Donc $x=\lambda a+\mu b$

Conclusion : $E = \text{vect}(a) \oplus \text{vect}(b)$



3) $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1,0,0)$ et $v = (0,1,-1)$. Montrons que $\text{vect}(u)$ et $\text{vect}(v)$ sont en somme directe mais qu'on n'a pas $E = \text{vect}(u) \oplus \text{vect}(v)$.

Soit $x \in \text{vect}(u) \cap \text{vect}(v)$ avec $x = (x_1, x_2, x_3)$.

$x \in \text{vect}(u)$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $(x_1, x_2, x_3) = (\lambda, 0, 0)$. Donc $x_2 = x_3 = 0$.

$x \in \text{vect}(v)$ donc $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tq $(x_1, 0, 0) = (0, \mu, -\mu)$. Donc $x_1 = 0$.

Donc $x = (0,0,0)$ donc $\text{vect}(u) \cap \text{vect}(v) = \{(0,0,0)\}$. Donc $\text{vect}(u)$ et $\text{vect}(v)$ sont en somme directe.

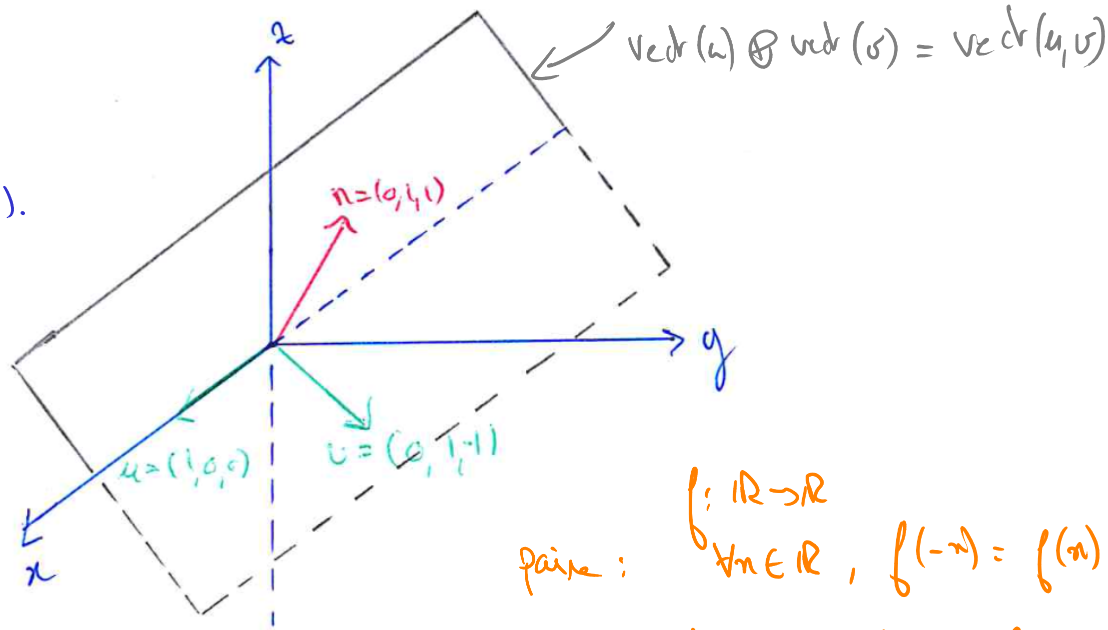
Montrons qu'il existe des vecteurs de $E = \mathbb{R}^3$ qui ne se décomposent pas en $\lambda u + \mu v$. En fait $\text{vect}(u) \oplus \text{vect}(v)$ est un sev strict de $E = \mathbb{R}^3$. En effet

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) \in \text{vect}(u) \oplus \text{vect}(v) &\iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y,z) = \lambda u + \mu v \\
&\iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y,z) = (\lambda, 0, 0) + (0, \mu, -\mu) \\
&\iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y,z) = (\lambda, \mu, -\mu) \\
&\iff y = -z \\
&\iff y + z = 0
\end{aligned}
$$

Donc $\mathrm{vect}(u) \oplus \mathrm{vect}(v) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tq } y+z=0\}$.

$=$ le plan orthogonal au vecteur $n=(0,1,1)$

$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tq } a_0x+b_0y+c_0z=0\}$ = plan passant par $(0,0,0)$ et $\perp$ à (a_0,b_0,c_0)



Rq : on a :

$E = \mathrm{vect}(u)+\mathrm{vect}(v)+\mathrm{vect}(n)$.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

paire : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=f(x)$

impaire : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=-f(x)$

4) $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. P = ensemble des fonctions paires, I = ens. des fonctions impaires. Alors $E=P\oplus I$.

* P et I sont des sev de E.

$0_E : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 0$ est une fonction paire

Si f,g sont deux fonctions paires et $\alpha\in\mathbb{R}$ alors $\alpha f+g$ est une fonction paire.

$\Rightarrow$ P est un sev de E.

De même on montre que I est un sev de E.

* Montrons que P et I sont en somme directe.

Soit $f\in P\cap I$ = { fonctions paires et impaires }.

$\forall x\in\mathbb{R},\ \left.\begin{array}{l} f(-x)=f(x)\\ f(-x)=-f(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=0.$

Donc f est la fonction nulle donc $P\cap I=\{0_E\}$.

* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrons que il existe $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = p(x) + i(x)$.

<u>Analyse</u> : Supposons que de telles fonction p et i existent. Alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) & (1) \\ f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x) & (2) \text{ (car } p \text{ paire et } i \text{ impaire)} \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $(1)-(2) \Rightarrow i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

<u>Synthèse</u> : Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

On a bien :

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = p(x)$ donc p paire
* $\forall x \in \mathbb{R}$, $i(-x) = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -i(x)$ donc i impaire.
* $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) + i(x) = f(x)$

Donc $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

5) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ = ens. des matrices $n \times n$ symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ = ens. des matrices $n \times n$ anti-symétriques. Alors :
$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

<u>Preuve</u> : Par analyse / synthèse (en exo).

4) Somme de plusieurs sev :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et E_1, E_2 deux sev de E. On peut munir $E_1 \times E_2$ d'une structure d'espace vectoriel :

ensemble des couples (x_1, x_2) avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$

$$+ : \begin{array}{ccc} (E_1 \times E_2) \times (E_1 \times E_2) & \longrightarrow & (E_1 \times E_2) \\ (x_1, x_2) ; (y_1, y_2) & \longmapsto & (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \end{array}$$

$$\cdot \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times (E_1 \times E_2) & \longrightarrow & (E_1 \times E_2) \\ \lambda ; (x_1, x_2) & \longmapsto & (\lambda x_1, \lambda x_2) \end{array}$$

Considérons l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 + E_2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$$

autre caractérisation du fait que E_1 et E_2 sont en somme directe.

Prop : E_1 et E_2 sont en somme directe ssi f est bijective

Rq : L'application f est linéaire :

$$f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2)$$

$$f(\lambda (x_1, x_2)) = \lambda f(x_1, x_2)$$

Lorsque f est bijective, on parle d'isomorphisme.

Preuve : Par déf. de $E_1 + E_2$ f est surjective. Montrons que f est injective $\Leftrightarrow$ E_1 et E_2 sont en somme directe.

$\Rightarrow$ Supposons f injective. Soit $x \in E_1 \cap E_2$. Alors $x = \underbrace{x}_{\in E_1} + \underbrace{0_E}_{\in E_2} = \underbrace{0_E}_{\in E_1} + \underbrace{x}_{\in E_2}$

donc $x = f(x, 0_E) = f(0_E, x)$. Comme f est injective on a : $(x, 0_E) = (0_E, x)$ i.e $x = 0_E$. Donc $E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \Leftrightarrow E_1 \oplus E_2$

$\Leftarrow$ Supposons E_1 et E_2 en somme directe ie $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
Montrons que f injective. Soit (x_1, x_2) et (y_1, y_2) dans $E_1 \times E_2$ tq $f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2)$. On a $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ donc

$\underbrace{x_1 - y_1}_{\in E_1} = \underbrace{y_2 - x_2}_{\in E_2}$. Donc $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0_E$ donc

$x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$ ie $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Donc f injective $\boxtimes$

Definition : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $E_1, .., E_n$ n sev de E. On definit

$E_1 + \dots + E_n = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ tq } x_i \in E_i,\ \forall i \in [\![1, n]\!]\}$.

On dit que $E_1, .., E_n$ sont en somme directe si pour tout vecteur x de $E_1 + .. + E_n$ la décomposition $x = x_1 + .. + x_n$ avec $x_1 \in E_1, .., x_n \in E_n$ est unique.

On note alors $E_1 \oplus E_2 .. \oplus E_n$

Soit $f : E_1 \times E_2 \times .. \times E_n \longrightarrow E_1 + .. + E_n$
$(x_1, ..., x_n) \longmapsto x_1 + .. + x_n$

Prop : $E_1, .., E_n$ sont en somme directe ssi f est bijective.

Caractérisation du fait que $E_1, .., E_n$ sont en somme directe.

Démo : La même que plus haut.

Remarque :

* $n=2$: E_1 et E_2 sont en somme directe si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.
  ce n'est plus une condition suffisante si $n \geq 3$:

* exple : $n=3$ on peut trouver E_1, E_2, E_3 tq
$$\begin{cases} E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \{0_E\} \\ E_1, E_2, E_3 \text{ pas en somme directe.} \end{cases}$$

$E = \mathbb{R}^2$ et
$$E_1 = \text{Vect}(1,0) = \{(\alpha,0),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$
$$E_2 = \text{vect}(0,1) = \{(0,\mu),\ \mu \in \mathbb{R}\}$$
$$E_3 = \text{vect}(1,1) = \{(\alpha,\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

On a déjà vu que $E_1 \oplus E_2$ et $E_1 \oplus E_3$ donc $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = \{(0,0)\}$.
Soit $x \in E_2 \cap E_3$: $x = (0,\mu) = (\alpha,\alpha)$ donc $\alpha = 0$ et $\mu = \alpha = 0$, donc $x = (0,0)$. On a aussi $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{(0,0)\}$.

Mais la somme n'est pas directe car la décomposition suivant $E_1 + E_2 + E_3$ n'est pas unique :

$$x = (2,1) = \underbrace{(2,0)}_{\in E_1} + \underbrace{(0,1)}_{\in E_2} = \underbrace{(1,1)}_{\in E_3} + \underbrace{(1,0)}_{\in E_1}$$

IV) Familles libres, génératrices, bases :

1) Définitions et exemples

Déf : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

(1) On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice si $\mathrm{vect}\{x_i, i\in I\} = E$.

(2) On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si

1er cas : I est fini : ($I = [\![1,n]\!]$ pour fixer les idées)

$$\forall (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in \mathbb{K}^n, \left(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0\right)$$

2ème cas : I est infini :

toutes les sous-familles finies de $(x_i)_{i\in I}$ sont libres.

(3) On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est une base si elle est libre et génératrice.

Exemples :

1) Par convention, la famille vide est libre.

2) $E = \mathbb{K}^n$.

$e_1 = (1,0,\dots,0)$; $e_2(0,1,0,\dots,0)$; $\dots$; $e_n = (0,\dots,0,1)$.

La famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée la base canonique.

* Montrons $(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice c-à-d $\mathrm{vect}(e_1,\dots,e_n) = \mathbb{K}^n$.

Soit $x\in\mathbb{K}^n$. Notons $x = (x_1,\dots,x_n)$. Alors :

$$x = (x_1,\dots,x_n) = (x_1,0,\dots,0) + (0,x_2,0,\dots,0) + \dots + (0,\dots,x_n)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Donc $\mathbb{K}^n = \mathrm{vect}(e_1,\dots,e_n)$.

* Montrons que $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille libre

Soit $(\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0_{\mathbb{K}^n}$. Montrons qu'alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = (0, 0, .., 0) \Rightarrow (\alpha_1, 0, .., 0) + \cdots + (0, .., 0, \alpha_n) = (0, .., 0)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) = (0, 0, .., 0)$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0.$$

Donc $(e_1, .., e_n)$ est libre. Conclusion c'est une base de $\mathbb{K}^n$.

3) $E = \mathbb{R}^3$. $a_1 = (1, 0, 0)$; $a_2 = (1, 1, 0)$; $a_3 = (1, 1, 1)$.

* Montrons que (a_1, a_2, a_3) est génératrice :

Soit $x \in \mathbb{R}^3$, on cherche $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dans $\mathbb{R}$ tq $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$.

Notons $x = (x_1, x_2, x_3)$:

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$
$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1, 0, 0) + (\alpha_2, \alpha_2, 0) + (\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ x_2 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ x_3 = \alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = x_3 \\ \alpha_2 = x_2 - x_3 \\ \alpha_1 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

* Montrons que (a_1, a_2, a_3) est libre : Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (\alpha_1, 0, 0) + (\alpha_2, \alpha_2, 0) + (\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0.$$

Donc (a_1, a_2, a_3) est génératrice et libre. C'est une base.

<u>Rq</u> : $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.

Pour $x = (x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$

x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées de x dans la base (e_1, e_2, e_3)

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ——————————————— (a_1, a_2, a_3)

4) $E = \mathbb{R}[X]$ (polynômes à coefficients réels)

Soit la famille $\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$ (famille infinie)

Montrons qu'elle est génératrice :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\exists n \in \mathbb{N}$ et $a_0, .., a_n \in \mathbb{R}$ tq

$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$. Donc $P \in \text{vect}\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Donc $\mathbb{R}[X] = \text{vect}\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Montrons que la famille est libre :

Soit $\{X^{n_1}, X^{n_2}, .., X^{n_q}\}$ une sous-famille finie de $\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$

Soit $(\alpha_1, .., \alpha_q) \in \mathbb{R}^q$ tq $\alpha_1 X^{n_1} + \dots + \alpha_q X^{n_q} = 0$ ← polynôme nul

Quitte à réordonner on peut supposer $n_1 < n_2 < \dots < n_q$.

Si $\alpha_q \neq 0$ alors $\deg(\alpha_1 X^{n_1} + \dots + \alpha_q X^{n_q}) = \deg(\alpha_q X^{n_q}) = n_q \geq 0$.

c'est impossible car $\deg(\alpha_1 X^{n_1} + \dots + \alpha_q X^{n_q}) = \deg(0) = -\infty$. Donc $\underline{\underline{\alpha_q = 0}}$

Donc $\alpha_1 X^{n_1} + \dots + \alpha_{q-1} X^{n_{q-1}} = 0$.

Puis on montre de même que $\alpha_{q-1} = 0$ puis .. $\alpha_1 = 0$.

Donc la sous-famille $\{X^{n_1}, .., X^{n_q}\}$ est libre. Donc toutes les sous-familles de $\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$ sont libre donc $\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$ est libre.

Donc $\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$ est une base.

5) $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On considère la famille $(E_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],\, j\in[\![1,p]\!]}$ où
$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & j & \\ & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \to i \end{array}$$

Alors cette famille $(E_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],\, j\in[\![1,p]\!]}$ est :

* génératrice : toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit comme une CL de cette famille : $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}$.

* libre : $(\alpha_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ $n\times p$ coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} E_{ij} = 0_E$$
matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On a alors
$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \cdots & & \alpha_{2p} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

Donc $(E_{ij})_{i\in[\![1,n]\!],\, j\in[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée la base canonique.

6) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{x} \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \end{array}$

Alors $\{f, g\}$ est une famille libre de E.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta g = 0_E$

c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha f(x) + \beta g(x) = 0$

$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha e^{x} + \beta e^{-x} = 0 \quad \times e^{x}$

$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha e^{2x} + \beta = 0$

$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \beta = -\alpha e^{2x}$

Or β est une constante et la fonction $x \mapsto e^{-2x}$ n'est pas constante.
Donc $\alpha = 0$. Donc $\beta = 0$.
Conclusion la famille $\{f, g\}$ est libre.

Déf : * Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre, on dit que les vecteurs qui la composent sont linéairement indépendants.
* Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

2) Propriétés :

Proposition : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

1) Si $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice alors tout vecteur de E s'écrit d'au moins une manière comme CL de vecteurs de $(x_i)_{i\in I}$.

2) Si $(x_i)_{i\in I}$ est libre alors tout vecteur de E s'écrit d'au plus une manière comme CL de vecteurs de $(x_i)_{i\in I}$.

3) Si $(x_i)_{i\in I}$ est une base alors tout vecteur de E s'écrit d'une unique manière comme CL de vecteurs de $(x_i)_{i\in I}$.

$I = \{1,2,3,4\}$. $I_1 = \{1,3\}$; $I_2 = \{2,3,4\}$

$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 = \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4$

Preuve :

1) Evident par déf. d'une famille génératrice.

1) et 2) $\Rightarrow$ 3). Reste à démontrer 2) :

Supposons $(x_i)_{i\in I}$ libre. Soit $x \in E$ admettant 2 décompositions :

$$\exists I_1 \subset I \text{ fini tq } x = \sum_{i\in I_1} \alpha_i x_i \quad (1)$$

$$\exists I_2 \subset I \text{ fini tq } x = \sum_{i\in I_2} \beta_i x_i \quad (2)$$

Donc (1)-(2) $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{i\in I_1\cap I_2} (\alpha_i - \beta_i) x_i + \sum_{i\in I_1 \setminus I_1\cap I_2} \alpha_i x_i + \sum_{i\in I_2\setminus I_1\cap I_2} (-\beta_i) x_i = 0_E$.

Comme la famille est libre :

* $\alpha_i = 0 \quad \forall i \in I_1 \setminus I_1 \cap I_2$
* $\beta_i = 0 \quad \forall i \in I_2 \setminus I_1 \cap I_2$
* $\alpha_i = \beta_i \quad \forall i \in I_1 \cap I_2$

Donc les deux décompositions sont identiques.

Prop :

1) La famille $\{x\}$ est libre ssi $x \neq 0_E$.
2) La famille $\{x, y\}$ est libre ssi x et y ne sont pas colinéaires
3) Une famille libre ne peut pas contenir le vecteur nul.
4) Une famille libre ne peut pas contenir deux fois le même vecteur
5) Toute sous famille d'une famille libre est libre.
6) Toute sur famille d'une famille génératrice est génératrice
7) Toute sur famille d'une famille d'une famille liée est liée

Exemples / Vocabulaire :

* (x_1, x_2, x_3, x_4) est une sur famille de (x_1, x_2)

* La famille $(x_1, 0_E, x_2)$ dans un $\mathbb{K}$-ev E est liée.

  En effet la CL $0_{\mathbb{K}} x_1 + \underbrace{1_{\mathbb{K}}}_{\neq 0} 0_E + 0_{\mathbb{K}} x_2 = 0_E$

* La famille (x_1, x_1, x_2) est liée :

  $\underbrace{1}_{\neq 0} . x_1 - \underbrace{1}_{\neq 0} . x_1 + 0 . x_2 = 0_E$

Théorème (des degrés échelonnés)

> Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes non nuls de degrés tous distincts. Alors la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est libre.

Remarque : Le résultat reste vrai si c'est une famille infinie de polynômes de degrés tous distincts.

Preuve : Quitte à réordonner les polynômes, on peut supposer que :

$\deg P_1 < \deg P_2 < \dots < \deg P_n$.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = 0$.

Si $\alpha_n \neq 0$ alors comme tous les degrés sont différents on a :

$$\deg(\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n) = \deg(\alpha_n P_n) = \deg P_n \geq 0.$$

c'est impossible car $\deg(\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n) = \deg(0) = -\infty$. Donc $\alpha_n = 0$.

Donc $\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{n-1} P_{n-1} = 0$. De même $\alpha_{n-1} = 0 \dots = \alpha_1 = 0$.

3) Etude de la dépendance linéaire.

<u>Prop :</u> Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs.

1) La famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée ssi $\exists i_0 \in I$ tq :

$$x_{i_0} \in \operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$$

« l'un au moins des vecteurs est CL des autres vecteurs »

2) Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre et si $x \in E$ Alors :

$$x \notin \operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I} \iff (x_i)_{i\in I} \cup \{x\} \text{ est libre}$$

<u>Preuve :</u> On fait la preuve pour $I = [\![1,n]\!]$ (on peut généraliser pour I infini).

1) ($\Rightarrow$) Supposons $(x_1,..,x_n)$ est liée. Alors $\exists \alpha_1,..,\alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tq $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_E$. Il existe au moins un $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tq $\alpha_{i_0} \neq 0$.

Alors $\alpha_{i_0} x_{i_0} = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \alpha_i x_i \Rightarrow x_{i_0} = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}} x_i$

Donc $x_{i_0} \in \operatorname{Vect}(x_i)_{i\in [\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$ tq $x_{i_0} \in \operatorname{Vect}(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{i_0\}}$.

Alors $\exists \alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_{i_0-1},\alpha_{i_0+1},\dots,\alpha_n$ tq $x_{i_0} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \alpha_i x_i$.

En posant $\alpha_{i_0} = -1$ on a alors : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_E$ avec $\alpha_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Donc la famille est liée.

2) Soit $(x_1,..,x_n)$ une famille libre et $x \in E$.

($\Rightarrow$) Supposons que $x \notin \operatorname{Vect}(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. Alors $x \neq 0_E$.

Supposons la famille $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \cup \{x\}$ liée. Alors $\exists \alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ non tous nuls tq $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x = 0_E$. Si $\alpha_{n+1} = 0$ alors $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0_E$. Comme $(x_1, \dots x_n)$ libre alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Ceci contredit le fait que $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ sont non tous nuls. Donc $\alpha_{n+1} \neq 0$. Donc :

$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} x_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} x_n$. Ceci contredit le fait que $x \notin \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$

Donc la famille $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \cup \{x\}$ est libre.

$\Leftarrow$ Si $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \cup \{x\}$ est libre alors $x \notin \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ par le 1).

Corollaire : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteur de E.

Alors on a équivalence entre :

(i) $(e_i)_{i\in I}$ est une base

(ii) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale (ie toute sous-famille n'est pas génératrice).

(iii) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale (toute sur-famille n'est plus libre)

4) Décomposition adaptée :

Théorème de recollement : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E.

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une base de F et $(g_j)_{j\in J}$ une base de G.

1) $E = F + G \Leftrightarrow (f_i)_{i\in I} \cup (g_j)_{j\in J}$ est une famille génératrice de E.

2) F et G sont en somme directe $\Leftrightarrow (f_i)_{i\in I} \cup (g_j)_{j\in J}$ est une famille libre de E

3) $E = F \oplus G \Leftrightarrow (f_i)_{i\in I} \cup (g_j)_{j\in J}$ est une base de E.

Si $E = F \oplus G$, on obtient une base de E en recollant une base de F et une base de G.

Preuve de (i) $\Leftrightarrow$ (iii) du corollaire :

(i) $\Rightarrow$ (iii)

Si (e_i) est une base alors c'est une famille libre. Montrons que c'est une famille libre maximale : En effet

Soit $x \in E$. Alors $x \in \mathrm{Vect}(e_i)$ car (e_i) est génératrice.

Donc $(e_i) \cup \{x\}$ est liée

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit (e_i) une famille libre maximale. Montrons que c'est une base c-a-d montrons qu'elle est génératrice. En effet :

Soit $x \in E$. Alors $(e_i) \cup \{x\}$ est liée (car (e_i) libre maximale)

Donc $x \in \mathrm{Vect}(e_i)$ car (e_i) est libre.

Preuve : dans le cas $I = [\![1, p]\!]$ et $J = [\![1, q]\!]$

1) ($\Rightarrow$) Si $E = F + G$. Alors $\forall x \in E$, $\exists x_F \in F$ et $\exists x_G \in G$ tq $x = x_F + x_G$.

Comme $(f_i)_{i \in I}$ est une base de F, c'est une famille génératrice de F donc :

$\exists \alpha_1, .., \alpha_p$ tq $x_F = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p$ De même $\exists \alpha_{p+1}, .., \alpha_{p+q} \in \mathbb{K}$ tq $x_G = \alpha_{p+1} g_1 + \dots + \alpha_{p+q} g_q$.

Donc $x = x_F + x_G = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p + \alpha_{p+1} g_1 + \dots + \alpha_{p+q} g_q$. Donc la famille $(f_1, .., f_p) \cup (g_1, .., g_q)$ est génératrice de E.

($\Leftarrow$) Si $(f_1, .., f_p) \cup (g_1, .., g_q)$ est génératrice de E alors $\forall x \in E$, $\exists \alpha_1, .., \alpha_{p+q} \in \mathbb{K}$ tq

$x = \underbrace{\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p}_{\in F} + \underbrace{\alpha_{p+1} g_1 + \dots + \alpha_{p+q} g_q}_{\in G}$. Donc $E = F + G$.

2) ($\Rightarrow$) Si $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $\alpha_1, .., \alpha_{p+q} \in \mathbb{K}$ sont des scalaires tq

$\underbrace{\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p}_{x} + \alpha_{p+1} g_1 + \dots + \alpha_{p+q} g_q = 0_E$ Alors notons $x = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p$.

On a $x = \underbrace{\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p}_{\in F} = \underbrace{-\alpha_{p+1} g_1 - \alpha_{p+2} g_2 - \dots - \alpha_{p+q} g_q}_{\in G}$. Donc $x \in F \cap G$.

Donc $x = 0_E$. Comme $(f_1, .., f_p)$ est libre car base de F on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$.

Comme $(g_1, .., g_q)$ libre (base de G) on a $\alpha_{p+1} = \dots = \alpha_{p+q} = 0$.

Donc $(f_1, \dots, f_p) \cup (g_1, .., g_q)$ est libre.

($\Leftarrow$) Supposons la famille $(f_1, .., f_p) \cup (g_1, .., g_q)$ est libre. Soit $x \in F \cap G$.

Alors $\begin{cases} x \in F & \text{et } (f_1, .., f_p) \text{ base de } F \text{ donc } x = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p. \\ x \in G & \text{et } (g_1, .., g_q) \text{ base de } G \text{ donc } x = \alpha_{p+1} g_1 + \dots + \alpha_{p+q} g_q \end{cases}$

Donc $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p - \alpha_{p+1} g_1 - \dots - \alpha_{p+q} g_q = x - x = 0_E$.

Comme $(f_1, .., f_p) \cup (g_1, .., g_q)$ est libre on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{p+q} = 0$.

Donc $x = 0_E$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$. Donc F et G sont en somme directe.

3) Découle directement de 1) et 2).

Généralisation :

Soit $E_1, \dots, E_p$ p sev de E.
Soit $(f_i^1)_{i\in I_1}$ une base de $E_1, \dots, (f_i^p)_{i\in I_p}$ base de E_p. Alors :

1) $E = E_1 + \dots + E_p \iff (f_i^1)_{i\in I_1} \cup \dots \cup (f_i^p)_{i\in I_p}$ génératrice.

2) $E_1 \oplus \dots \oplus E_p \iff (f_i^1)_{i\in I_1} \cup \dots \cup (f_i^p)_{i\in I_p}$ libre.

3) $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p \iff (f_i^1)_{i\in I} \cup \dots \cup (f_i^p)_{i\in I_p}$ base de E.

V) Espaces vectoriels de dimension finie :

1) Définitions :

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie $(x_1, \dots, x_m)$.

Exemples :

1) $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie car la famille
$$e_1 = (1,0,0) ; \; e_2 = (0,1,0) ; \; e_3 = (0,0,1)$$
est génératrice. En effet $\forall x = (x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3$ on a :
$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, i.e. $x \in \text{vect}(e_1, e_2, e_3)$.

2) De même $\mathbb{K}^n$ est de dim. finie.

3) $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

4) $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. En effet soit $(P_1, \dots, P_m)$ une famille finie composée de m polynômes. Montrons que cette famille n'est pas génératrice.

Soit $n_0 = \max\{\deg P_i, i = 1, .., m\}$. Tout polynôme qui est CL des $P_1, .., P_m$ est de degré au plus n_0. Donc tout polynôme de degré strictement supérieur à n_0 n'appartient pas à $\mathrm{vect}(P_1, .., P_m)$. Donc $\mathrm{vect}(P_1, .., P_m) \neq \mathbb{K}[X]$.

Propriété fondamentale des Ev de dimension finie :

> Soit E un espace vectoriel de dimension finie : il existe une famille génératrice finie $(x_1, .., x_m)$.
>
> Alors une famille libre ne peut avoir plus d'éléments que la famille $(x_1, \dots, x_m)$.

Preuve :

Supposons qu'il existe une famille libre $(y_1, \dots, y_{m+1})$ à $m+1$ vecteurs.

Comme $(x_1, .., x_m)$ est génératrice on peut écrire :

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m \quad \text{avec } (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m.$$

Comme $y_1 \neq 0_E$ les α_i ne sont pas tous nuls. Quitte à effectuer une permutation d'indices, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. On a alors :

$$x_1 = \frac{1}{\alpha_1} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} x_3 \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} x_m.$$

Donc toute CL de $(x_1, .., x_m)$ est une CL de $(y_1, x_2, .., x_m)$.

Donc la famille $(y_1, x_2, .., x_m)$ est génératrice.

Raisonnant par récurrence, supposons qu'on peut remplacer x_i par y_i jusqu'à l'indice k (avec $k<m$) en conservant le caractère générateur de la famille et vérifions qu'on peut encore le faire à l'indice $k+1$.

$(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$ est génératrice donc :

$$y_{k+1} = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_m x_m$$

La famille $(y_1, \dots, y_{k+1})$ est libre donc les coefficients $(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m)$ ne sont pas tous nuls. Quitte à permuter les indices on peut supposer $\alpha_{k+1} \neq 0$. Donc

$$x_{k+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}} y_1 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} y_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} y_{k+1} - \frac{\alpha_{k+2}}{\alpha_{k+1}} x_{k+2} - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{k+1}} x_m$$

Donc toute CL de $(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$ est une CL de $(y_1, \dots, y_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m)$ qui est donc génératrice.

Par récurrence on a alors que $(y_1, \dots, y_m)$ est génératrice. On en déduit que y_{m+1} est une CL des $y_1, \dots, y_m$, ce qui contredit le fait que $(y_1, \dots, y_{m+1})$ est libre.

Conclusion la famille $(y_1, \dots, y_{m+1})$ ne peut être libre. ∎

" s'il existe une famille génératrice à m éléments, une famille libre ne peut avoir plus de m éléments ".

Déf / Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Alors les bases de E ont toutes le même cardinal.
Cet entier est appelé la dimension.

Preuve : Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de E et $(g_1, \dots, g_q)$ une autre base de E.

$$\left.\begin{array}{l} (f_1, \dots, f_p) \text{ est une famille génératrice } E \\ (g_1, \dots, g_q) \text{ est une famille libre de } E \end{array}\right\} \Rightarrow q \leq p.$$

De même on montre que $p \leq q$. Donc $q = p$. Cet entier est appelé la dimension de E.

Exemples :

1) On a vu que dans $\mathbb{K}^n$, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ était une base. Donc $\dim \mathbb{K}^n = n$.
   Par exemple $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

2) Une base de $\mathbb{K}_n[X]$ est la famille $\{X^k, k \in [\![0, n]\!]\}$.
   Donc $\boxed{\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1}$

$$\mathbb{K}_2[X] = \{P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3\}$$
$$= \mathrm{Vect}(1, X, X^2).$$

$$\dim \mathbb{K}_2[X] = 3.$$

(Pratique dans les exos)

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

(i) Toute famille libre de cardinal n est une base.

(ii) Toute famille génératrice de cardinal n est une base.

Preuve :

(i) La famille est libre maximale car toute sur-famille serait de cardinal $\geq n+1$ donc serait liée.

(ii) La famille est génératrice minimale car s'il existe une sous-famille génératrice alors $\dim E \leq n-1$.

2) Existence de bases en dimension finie :

Théorème de la base incomplète :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

(i) Soit $(g_1, .., g_q)$ une famille génératrice de E. Alors on peut en extraire une sous-famille qui est une base de E.

(ii) Soit $(g_1, ..., g_q)$ une famille génératrice de E et $(\ell_1, .., \ell_p)$ une famille libre de E. Alors on peut compléter $(\ell_1, .., \ell_p)$ en une base de E avec des vecteurs choisis dans la famille $(g_1, ..., g_q)$.

Conséquence : Toute espace vectoriel de dimension finie non nulle admet une base.

Preuve :

(i) Notons A l'ensemble des sous-familles libres de $(g_1,\dots,g_q)$.

B l'ensemble des cardinaux des familles de A.

La famille vide est libre donc $0 = \mathrm{card}(\phi) \in B$. Donc B est non vide.

De plus B est majoré par q (car $(g_1,\dots,g_q)$ est de card q).

Donc B admet un plus grand élément. Notons le $n = \max B$.

Soit $I \subset [\![1,q]\!]$ et $(g_i)_{i\in I}$ une famille de A de cardinal n.
Par construction, $(g_i)_{i\in I}$ est libre, montrons qu'elle est génératrice.
Montrons pour cela que $\forall i_0 \in [\![1,q]\!]\setminus I$, $g_{i_0} \in \mathrm{Vect}(g_i)_{i\in I}$: en effet, $(g_i)_{i\in I\cup\{i_0\}}$ est une sous-famille de $(g_1,\dots,g_q)$ de cardinal $n+1$. Par définition de $n=\max B$, $(g_i)_{i\in I\cup\{i_0\}}$ est donc une famille liée.
Comme $(g_i)_{i\in I}$ est libre, on en déduit que $g_{i_0} \in \mathrm{Vect}(g_i)_{i\in I}$.

Comme tout vecteur de E est CL de $(g_1,\dots,g_q)$ et que $\forall i_0 \in [\![1,q]\!]\setminus I$ g_{i_0} est CL de $(g_i)_{i\in I}$, on en déduit que $(g_i)_{i\in I}$ est génératrice, c'est donc une base de E, et $n = \dim E$.

(ii) La famille $(\ell_1,\dots,\ell_p)$ est libre et la famille $(\ell_1,\dots,\ell_p,g_1,\dots,g_q)$ est génératrice. Notons :

$A = \{ J \subset [\![1,q]\!] \text{ tq } (\ell_1,\dots,\ell_p)\cup(g_i)_{i\in J} \text{ soit libre}\}$

$B = \{ \mathrm{card}\, J,\ J\in A\}$.

Alors $A \neq \emptyset$ car $\emptyset \in A$. Donc $B \neq \emptyset$ car $0 \in B$. De plus B est majoré par q.

Donc B admet un plus grand élément. Notons le $n = \max B$.
Soit J_0 un élément de A de cardinal n. La famille $(l_1, \dots, l_p) \cup (g_i)_{i \in J_0}$ est libre. On montre comme dans (i) que $\forall i_0 \in [\![1, q]\!] \setminus J_0$, $g_{i_0} \in \text{vect}\,(g_i)_{i \in J_0}$. Donc :

$$\text{vect}\,(l_1, \dots, l_p) \cup (g_i)_{i \in J_0} = \text{vect}\{(l_1, \dots, l_p) \cup (g_1, \dots, g_q)\} = E.$$

Donc la famille $(l_1, \dots, l_p) \cup (g_i)_{i \in J_0}$ est libre et génératrice.

Corollaire : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.
Soit $(l_1, \dots, l_p)$ une famille libre. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base. Alors on peut compléter $(l_1, \dots, l_p)$ en une base avec des vecteurs de la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Exemple : $E = \mathbb{R}^4$ et $a_1 = (2, 1, -1, 0)$; $a_2 = (3, 2, 0, 0)$.

La famille (a_1, a_2) est libre car a_1 et a_2 ne sont pas colinéaires.

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On peut compléter (a_1, a_2) par des vecteurs de la base canonique en une base de $\mathbb{R}^4$.

Montrons par exemple que (a_1, a_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

C'est une famille libre. En effet soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}^4$ tq

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

40'

Alors : $\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = 0$ et $\alpha_4 = 0$

Donc (a_1, a_2, e_3, e_4) est une famille libre de cardinal 4.

Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

<u>Prop</u> (Dimension de l'espace produit)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dim finie. Alors $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-ev de dim finie et :

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F$$

$\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$

<u>Rq</u> : cohérent avec $\dim(\mathbb{K}^n) = n = \dim \mathbb{K} + \cdots + \dim \mathbb{K}$.

<u>Preuve</u> : Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_q)$ une base de F.

Alors $(e_i, 0_F)_{i \in [\![1,p]\!]} \cup (0_E, f_j)_{j \in [\![1,q]\!]}$ est une base de $E \times F$.

Donc $\dim E \times F = \dim E + \dim F$.

3) Sous-espaces vectoriels en dimension finie.

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit F un sev de E.

Alors : (i) F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$

(ii) $F = E \iff \dim F = \dim E$

Preuve :

(i) Notons $n = \dim E$. Les familles libres de F sont des familles libres de E. Elles ont donc au plus n éléments. L'ensemble des cardinaux des familles libres de F est non vide (il contient 0 car la famille vide est libre) majoré (par n) donc admet un plus grand élément p. Comme dans la preuve du théorème de la base incomplète, on en déduit l'existence d'une base de F à p éléments. On a par ailleurs $p \leq n$ ie $\dim F \leq \dim E$.

(ii) $\Rightarrow$ évident. $\Leftarrow$ si $\dim F = \dim E$ alors une base de F est une famille libre à n éléments de E. Donc c'est une base de E. Donc $F = E$.

Corollaire : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sev de E de dimension finie.

Alors : $F = G \iff \begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases} \iff \begin{cases} G \subset F \\ \dim F = \dim G \end{cases}$

Remarque : Ici E n'est pas forcément de dimension finie.

Prop (Existence d'un supplémentaire en dim finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de <u>dimension finie</u>. Soit F un sev de E.

Alors $\exists G$ un sev de E tq $E = F \oplus G$.

Preuve : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F.
On a $p \leq n$. D'après le th. de la base incomplète, on peut compléter la famille libre $(f_1, \dots, f_p)$ en une base de E : il existe des vecteurs $g_{p+1}, \dots, g_n$ choisis dans la famille $(e_1, \dots, e_n)$ tq $(f_1, \dots, f_p, g_{p+1}, \dots, g_n)$ est une base de E. Posons alors $G = \text{Vect}(g_{p+1}, \dots, g_n)$. Alors $(g_{p+1}, \dots, g_n)$ est une base de G. On a donc $E = F \oplus G$ par le th. de recollement.

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G deux sev de E de dimensions finies en somme directe. Alors $F \oplus G$ est de dimension finie et

$$\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$$

Rq : E n'est pas forcément de dim finie.

Preuve : Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_q)$ une base de G.
Alors par le th. de recollement la famille $(f_1, \dots, f_p) \cup (g_1, \dots, g_q)$ est libre car F et G sont en somme directe. De plus elle est génératrice de $F + G$. Donc c'est une base de $F \oplus G$.

Donc $\dim F \oplus G = p + q = \dim F + \dim G$.

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G deux sev de E de dimension finie.
Alors $F+G$ et $F\cap G$ sont de dimension finie et on a :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$$

Cette formule s'appelle la formule de Grassmann

Rq : Si F et G sont en somme directe ($F\cap G = \{0_E\}$) on retrouve $\dim(F\oplus G) = \dim F + \dim G$.

Preuve :

On obtient une famille génératrice de $F+G$ en recollant une base de F et une base de G. Donc $F+G$ est de dimension finie. De plus $F\cap G \subset F$ donc $F\cap G$ est de dimension finie.

Soit F' un supplémentaire de $F\cap G$ dans F. Montrons que $F+G = F'\oplus G$.
On a $F'\cap G \subset F'\cap(F\cap G)$ ie $F'\cap G \subset \{0\}$ car F' et $F\cap G$ sont en somme directe. Donc F' et G sont en somme directe.

On a clairement que $F'+G \subset F+G$ car $F'\subset F$. De plus, pour $x\in F+G$, $x = x_F + x_G$ avec $x_F\in F$ et $x_G \in G$, et on a :
$x_F = x_{F'} + x_{F\cap G}$ avec $x_{F'}\in F'$ et $x_{F\cap G}\in F\cap G$. Donc :

$$x = \underbrace{x_{F'}}_{\in F'} + \underbrace{x_{F\cap G} + x_G}_{\in G}. \text{ Donc } F+G \subset F'+G.$$

Conclusion : $F+G = F'\oplus G$. On en déduit que :

$\dim(F+G) = \dim(F'\oplus G) = \dim F' + \dim G$. Or $F = F'\oplus F\cap G$ donc $\dim F = \dim F' + \dim F\cap G$ ie $\dim F' = \dim F - \dim(F\cap G)$. Donc
$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$.

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim finie. (Pratique pour beaucoup d'exos)

Soit F et G deux sev de E alors :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

Preuve :

($\Rightarrow$) Supposons $E = F \oplus G$. On a alors $F \cap G = \{0_E\}$ car F et G sont en somme directe. On sait aussi $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$. Comme $F \oplus G = E$ on a $\dim E = \dim F + \dim G$.

($\Leftarrow$) $F \cap G = \{0_E\}$ donc F et G sont en somme directe.
Montrons que $F + G = E$. On a $F+G$ est un sev de E. Pour montrer que $F+G = E$ il suffit de montrer que $\dim(F+G) = \dim E$.
$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0} = \dim E$. ∎

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie : $\dim E = n$.

Soit H un sev de E de dimension $n-1$. On dit que H est un hyperplan de E.

* Si $\dim E = 2$, les hyperplans sont des droites : $H = \mathrm{vect}(x)$ avec $x \in E \setminus \{0_E\}$
* Si $\dim E = 3$, les hyperplans sont des plans : $H = \mathrm{vect}(x, y)$ avec $x, y \in E$ non colinéaires.

Prop: Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et H un hyperplan de E. Soit $x \in E$ tel que $x \notin H$. Alors :

$$E = H \oplus \mathrm{vect}(x)$$

Les supplémentaires de H sont les droites vectorielles qui ne sont pas incluses dans H.

Preuve: Notons $n = \dim E$. Soit $(e_1, e_2, .., e_{n-1})$ une base de H. C'est donc une famille libre de E. Comme $x \notin \mathrm{vect}(e_1, ..., e_{n-1}) = H$ la famille $(e_1, .., e_{n-1}) \cup \{x\}$ est libre donc H et $\mathrm{vect}(x)$ sont en somme directe par le théorème de recollement et $H \oplus \mathrm{vect}(x) = \mathrm{vect}(e_1, .., e_{n-1}, x)$. La famille $(e_1, .., e_{n-1}) \cup \{x\}$ est une famille libre à n vecteurs donc c'est une base de E. Donc $\mathrm{vect}(e_1, .., e_{n-1}, x) = E$. Donc $E = H \oplus \mathrm{vect}(x)$. ■

Exemple:

$E = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, -1)$, $x = (0, 1, 1)$.

Alors $H = \overbrace{\mathrm{vect}(u) \oplus \mathrm{vect}(v)}^{= \mathrm{vect}(u,v)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } y + z = 0\}$.

On a $x \notin H$ donc $E = H \oplus \mathrm{vect}(x)$.