Fiche 5

CONTINUITÉ

Exercice 1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$.

1. Soit O un ouvert de E. On suppose que la restriction de f à O, notée $f_{|_O}$, est continue. Montrer que f est continue en tout point de O i.e. f est continue sur O.
2. Le résultat de la question précédente est-il vrai si on suppose cette fois que l'ensemble O n'est pas ouvert ?

Exercice 2. (Facultatif) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $a \in E$ non nul. On considère l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \begin{cases} \|x - a\| & \text{si } \|x\| \leq \|a\| \\ 0 & \text{si } \|x\| > \|a\| \end{cases}$$

1. Montrer que les ensembles $U = \{x \in E \mid \|x\| < \|a\|\}$ et $V = \{x \in E \mid \|x\| > \|a\|\}$ sont deux ouverts de E.
2. Montrer que f est continue sur U et V.
3. Montrer que f est continue en a et discontinue en $-a$. Plus généralement, soit $u \in E$ vérifiant $\|u\| = \|a\|$, la fonction f est-elle continue en u ?

Exercice 3. (La continuité et la densité)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et soit $f : E \to F$ surjective continue. Montrer que si $A \subset E$ est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans F.

Exercice 4. (La "diagonale")

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Montrer que $\Delta = \{(y, y),\, y \in F\}$ est un fermé de $F \times F$.
2. Soient f, $g : E \to F$ continues. Montrer que
$$H = \{x \in E;\, f(x) = g(x)\}$$
est un fermé de E.
3. Montrer que si f, g coincident sur une partie A dense dans E alors $f = g$ sur E.

Exercice 5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $E \times E$ muni de la norme produit infinie : pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\|(x, y)\|_{E \times E} = \max(\|x\|, \|y\|)$.

2. Soit A, B deux parties non vides de E. On rappelle que

$$d(A,B) = \inf\{\|a-b\|;\, a \in A,\, b \in B\}.$$

Montrer que si A et B sont des compacts de E alors cette distance est atteinte i.e. il existe $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ tel que $d(A,B) = \|a_0 - b_0\|$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E et f une forme linéaire sur E.

1. Montrer que $x \in E \longmapsto \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E.
2. En déduire que f est continue.

Exercice 7. Soit $E = C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie : pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Considérons l'application de dérivation

$$\begin{array}{ccccc} D & : & E & \to & E \\ & & f & \mapsto & f' \end{array}$$

a. D est-elle continue sur E (pour $\|\cdot\|_\infty$) ?

b. Peut-on munir E d'une norme qui rende D continue ?

Indication : considérer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto e^{nx}$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \mathrm{Tr}(M) = 2\}$ est-il un ouvert, fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 9. Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}$ telles que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ converge . Si $a = (a_n)_{n\geq 0}$ appartient à E, on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E. Dans la suite, on munit E de cette norme. Toutes les questions qui suivent se traiteront donc par rapport à cette norme.
2. Soit $\varphi : E \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(a) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ pour tout $a \in E$.

   a. Montrer que φ est linéaire et qu'elle est continue sur E.

   b. Soit $F = \{a \in E\,;\, \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = 1\}$.

      i) Montrer que F est un fermé de E.

      ii) Montrer que F n'est pas un ouvert de E.

      iii) Montrer que F n'est pas borné.

Exercice 10. (La continuité et la compacité, cours) Soient $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $f : E \longrightarrow F$ une application continue de E vers F, et $A \subset E$.

1. Montrer que l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ de E dans $\mathbb{R}$ est continue.
2. Montrer que si A est compact, alors $f(A)$ est borné.

   Indication : Pour montrer que $f(A)$ est borné, on peut montrer ce résultat plus fort : $f : E \longrightarrow F$ est continue et $A \subset E$ est un compact de E, alors $f(A)$ est un compact de F.
3. Montrer que le point précédent est faux si A n'est pas compact.