Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

Math IV Analyse

Fiche 4

Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 1. Démontrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:

1. en montrant que son complémentaire est ouvert,
2. par la caractérisation séquentielle des parties fermées.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0 \in E$ et on définit

$$\begin{array}{cccc} t & : & E & \longmapsto & E \\ & & u & \longrightarrow & x_0 + u \end{array}$$

1. Montrer que si $U \subset E$ est une partie ouverte, alors $t(U)$ est aussi une partie ouverte de E.
2. Montrer que si $F \subset E$ est une partie fermée, alors $t(F)$ est aussi une partie fermée de E.

Exercice 3. i) Les parties suivantes de $\mathbb{R}^n$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

1. Les intervalles $]a, b]$, $[a, +\infty[$ pour a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
2. $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}]$,
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 2\}$,
4. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0\}$,
5. $C = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid x_1^2 + \cdots + x_p^2 \leq 5\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

ii) Les ensembles suivants de $\mathbb{R}^n$ sont-ils des ouverts, fermés, compacts ? Déterminer leur intérieur, adhérence et frontière :

1. $D = \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x > y + 1\}$,
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Exercice 4. (La densité des rationnels et des irrationnels) On munit $\mathbb{R}$ de la norme valeur absolue. Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ et d'intérieur vide.

Exercice 5. (Compacts) Déterminer si les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont, ou ne sont pas, compacts :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 = 1\}$,
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^5 = 2\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$,
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$,

Exercice 6. (Fermés, Compacts)
Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E. On définit $A+B=\{a+b \mid (a,b)\in A\times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A+B$ est fermé dans E.
2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A+B$ l'est aussi.
3. Soient $A=\mathbb{R}\times\{0\}$ et $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $A+B$ n'en est pas un.

Exercices supplémentaires

Exercice 7. (Ensembles finis) Soit $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé non nul.

1. Montrer que toute partie finie de E est fermée et d'intérieur vide.
2. Trouver une partie infinie de E qui est fermée et d'intérieur vide.

Exercice 8. On considère l'espace vectoriel $E=\mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ et on note $F=\{f\in E \mid f(0)=0\}$.

1. Montrer que F est un fermé de E pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$.
2. Le but de cette question est de montrer que F n'est pas un fermé de E pour la norme $\|\,.\,\|_1$ mais qu'il est dense dans $(E,\|\,.\,\|_1)$.
   (a) Soit $g\in E$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$ par
   $$\forall t\in\left[0;\frac{1}{n}\right],\ f_n(t)=ntg\left(\frac{1}{n}\right)\qquad\text{et}\qquad\forall t\in\left]\frac{1}{n};1\right],\quad f_n(t)=g(t).$$
   Montrer que $f_n\in F$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers g pour $\|\,.\,\|_1$.
   (c) Conclure.

Exercice 9. (Compacts) On considère $E=\mathcal{C}([0;2\pi];\mathbb{C})$ muni de la norme $\|\,.\,\|_2$. Le but de l'exercice est de montrer que la boule unité fermée $\overline{B}(0_E,1)$ de $(E,\|.\|_2)$ n'est pas compacte.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit l'application $f_n:[0;2\pi]\longrightarrow\mathbb{C}$ par $f_n(x)=e^{inx}$ pour tout $x\in[0;2\pi]$.

1. Pour tous $p,n\in\mathbb{N}$, calculer explicitement $\|f_n-f_p\|_2$.
2. Construire à partir de la suite $(f_n)_n$, une suite $(g_n)_n$ d'éléments de la boule unité fermée $\overline{B}(0_E,1)$ et calculer $\|g_n-g_p\|_2$ pour tous $n,p\in\mathbb{N}$.
3. En déduire que $\overline{B}(0_E,1)$ n'est pas compacte.

Exercice 10. (Compacts : cours) Soit $(E,\|\ .\|)$ un espace vectoriel normé et $X\subset E$ une partie compacte. Montrer que toute partie fermée de E incluse dans X est elle-même compacte.