Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

Math IV - Analyse

Fiche 3

Espaces vectoriels normés

I. Normes

Exercice 1. (Normes dans $\mathbb{R}^n$) Dans cet exercice on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a. Montrer que les applications suivantes définies pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$.

b. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{cccc} \|\,.\,\|_2 & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \end{array} .$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Indication : Pour vérifier que $\|.\|_2$ satisfait l'inégalité triangulaire, vous pouvez vous servir sans preuve de ***l'inégalité de Cauchy-Schwarz*** :

$$\text{pour tous } \ (a_1, \dots, a_n)\ ,\ \ (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n\ ,\ \left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \ \leq \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\ .\ )$$

c. Dessiner $B((0,0),1)$ dans $\mathbb{R}^2$, par rapport à $\|\,.\,\|_\infty$, $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$.

2. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{cccc} \|\,.\,\| & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est de la forme $\|x\| = \alpha |x|$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

Exercice 2. On travaille sur $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier (sans calcul) que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes deux à deux.
2. Trouver des constants α, β et γ positives telles que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u\|_1 \leq \alpha \|u\|_2 \leq \beta \|u\|_\infty \leq \gamma \|u\|_1. \tag{1}$$

En déduire directement de (1) que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes deux à deux.

3. Soient $\|.\|_p$ la norme p avec $p \geq 1$ qui est définie par $||x||_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$ et $\|\ \|_\infty$ la norme ∞ qui est définie par $||x||_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\lim\limits_{p \to \infty} ||x||_p = ||x||_\infty$.

Exercice 3. On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{cccc} N_1 & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2) & \longmapsto & |x_1 + x_2| + |x_1| \end{array}, \qquad \begin{array}{cccc} N_2 & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2) & \longmapsto & \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) \end{array}.$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer la boule unité fermée autour de l'origine par rapport à N_1, et par rapport à N_2.

Exercice 4. Les applications N suivantes sont-elles des normes ?

1. $N : C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ f \longmapsto \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
2. $N : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ f \longmapsto \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|^2$.
3. $N : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ f \longmapsto \sup\limits_{x\in[0;\frac{1}{2}]} |f(x)|$.
4. $N : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ f \longmapsto \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$.
5. $N : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ P \longmapsto \sup\limits_{x\in[0;1]} |P(x)|$.
6. $N : C([0,2\pi],\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ f \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)\sin t|\, dt$.
7. $N : C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ f \longmapsto \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$
8. $N : C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ f \longmapsto \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right|$.
9. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ (x,y) \longmapsto |x| + 2|y|$.
10. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ (x,y) \longmapsto \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$.

où $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Pour tout $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2\,\mathrm{d}t}, \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|.$$

1. En adaptant un peu l'exercice précédent, on sait que $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sont des normes sur $C([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $\|\,.\,\|_2$ définit aussi une norme sur $C([0;1],\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$, mais que ces trois normes ne sont pas deux à deux équivalentes.

   Indication : on pourra considérer les fonctions $f_n : x \longmapsto x^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application N_∞ par $N_\infty(A) = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que N_∞ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$.
2. Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) \leq cN(A)N(B).$$

II. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Exercice 7. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ d'applications, dfinies par :

$$\forall x \in [0;1],\ f_n(x) = x^{\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}}.$$

(avec la convention $0^x = 0$ pour tout $x > 0$).
Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ vers la fonction constante $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$, pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 8. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et on considère N définie par :

$$N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx \text{ pour tout } f \in E.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telle que $f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}; 1\right] \end{cases}$.
   (a) Pour un $n \in \mathbb{N}^\star$, tracer la courbe de f_n.
   (b) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers la fonction nulle dans (E, N).
   (c) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ne converge pas vers la fonction nulle dans $(E, \|.\|_\infty)$.
   (d) Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 9. On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et on considère une suite de réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit deux applications N et N' sur E par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E, \quad N(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, |a_k| \qquad \text{et } N'(P) = \max_{k\in[\![0;n]\!]} |a_k| \,.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_n$ pour que N définisse une norme sur E. On admet que N' définit une norme sur E.
2. Dans cette question, on suppose que la suite $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = X^n$. Étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour N.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = 1 + X + \cdots + X^n$. Étudier la convergence de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour N'.