Fiche 1

Série de fonctions

Exercice 1 (Convergence simple, normale et uniforme)
Etudier la convergence simple, la convergence normale puis la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$,
2. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a>0$,
3. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x}{n^3+x^{3/2}}$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 2 (Convergence simple, uniforme et normale)
On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$.

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle elle converge normalement.

Exercice 3 (Série de fonction, intégrale, et dérivée)
On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sa somme $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est une fonction continue.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (Classe $\mathcal{C}^\infty$)
On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose (lorsque cela a un sens)

$$\varphi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) .$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction φ.
2. Justifier l'existence de l'intégrale suivante et la calculer explicitement :

$$I = \int_0^1 \varphi(x) \ \mathrm{dx}.$$

Exercice 6 Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \ .$$

1. Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f.
2. Étudier la continuité de f sur D_f.
3. Montrer que la fonction f est strictement décroissante.
4. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 7 On considère la série de fonctions $\sum_n f_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \frac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1}.$$

1. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $E_s = [0, +\infty[$.
   (b) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur $E_a =]0, +\infty[$.
   (c) Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur E_s.
   (d) La série converge-t-elle normalement sur E_s ? Et sur E_a ? Justifier.
2. Soit S la fonction somme de la série de fonctions $\sum f_n$. Montrer que lorsque t tend vers $+\infty$, $S(t)$ tend vers 1.

Exercices d'entraînement

Exercice 8 Montrer que les séries de fonctions suivantes ne convergent pas normalement sur l'intervalle I indiqué en montrant que $\sum ||f_n||_\infty$ diverge.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \frac{1}{n+x^n}$ sur $I =]1,2]$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \frac{\sin nx}{n}$ sur $I = \mathbb{R}$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto e^{-nx^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 9 Montrer que les séries de fonctions suivantes ne convergent pas normalement ni uniformément sur l'intervalle indiqué I en trouvant $(x_n)_n$ tel que $f_n(x_n)$ ne tend pas vers 0.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \frac{1}{xn^2}$ sur $I =]0,\infty[$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto 2^{-n/x}$ sur $I =]0,\infty[$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto n^2x^n$ sur $I = [0,1[$,
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto e^{-nx}$ sur $I =]0,\infty[$,
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ sur $I = [0,\infty[$.

(Indication : Si le dénominateur est la somme de deux termes positifs, l'argument x_n est souvent la valeur où les deux termes sont égaux.)

Exercice 10 Montrer que les séries de fonctions suivantes ne convergent pas normalement sur l'intervalle I indiqué en trouvant $(x_n)_n$ tel que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ sur $I =]0,\infty[$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \frac{n+x^3}{n^4+x^4}$ sur $I = [0,\infty[$.

Exercice 11 Montrer que les séries de fonctions suivantes convergent normalement sur l'intervalle I indiqué en montrant que $\sum ||f_n||_\infty$ converge.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \frac{1}{n^2x}$ sur $I = [1,2]$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ sur $I = [1,\infty[$,
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \frac{n+x^2}{n^4+x^2}$ sur $I = [0,1]$.

Exercice 12 Montrer que les séries de fonctions suivantes convergent normalement sur l'intervalle I indiqué, en trouvant $(a_n)_n$ tel que $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall x$ et $\sum a_n$ converge.

1. $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{n+x}{n^4+x^2}$ sur $I = [0, \infty[$,
2. $\sum_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto e^{-n(x^2+1)} + e^{-n((x+1)^2+1)}$ sur $I = \mathbb{R}$,
3. $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{n^2}$ sur $I = [0, a]$, $a < 1$.

(Indication : Si le dénominateur est la somme de deux termes positifs, on trouve souvent deux majorations pour deux parties de l'intervalle en supprimant un des deux termes en faisant la différence si x est plus grand ou plus pétit que la valeur où les deux termes sont égaux.)

Exercice 13 Énoncer les conditions des théorèmes du cours qui impliqueraient les identités et propositions suivantes et déterminer si elles sont vérifiées :

1. $(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ pour tout $x \in]-1, 1[$,
2. $(\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^2})' = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
3. $(\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^3})' = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ avec $f_n : x \longmapsto e^{-xn}$ est continue sur $]0, \infty[$.