CC2

Exercice 1. Les deux propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ?Justifier.

1. Il existe une norme dans $\mathbb{R}^2$ pour laquelle la boule unité fermée est la suivante :

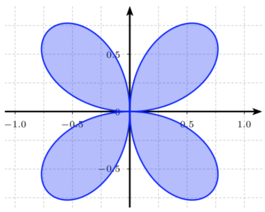

FIGURE 1 –

2. Deux normes quelconques N_1 et N_2 sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, sont équivalentes.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 1. \tag{E}$$

On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant

$$y(0) = y'(0) = 0. \tag{CI}$$

Supposons qu'il existe une fonction y, somme d'une série entière de rayon de convergence strictement positif avec $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, solution de (E) avec (CI).

1. Calculer a_0, a_1.
2. Calculer a_2 et trouver une relation entre a_{n+2} et a_n pour tout $n \geq 1$.
3. Calculer explicitement a_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ? Conclure.
4. Exprimer y à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 3. Soit $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R})\ ;\ f(0) = 0\}$. On pose

$$N_1(f) = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x) + f'(x)|, \text{ et } N_2(f) = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| + \sup_{0\leq x\leq 1} |f'(x)|.$$

1. Montrer que
$$\forall g \in E, \quad \sup_{0\leq x\leq 1} |g(x)| \leq \sup_{0\leq x\leq 1} |g'(x)|.$$
Indication : $g(x) = \int_0^x g'(t)dt.$
2. Soit $f \in E$. Montrer que :
$$\sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| \leq eN_1(f).$$
Indication : On pose $g(x) = e^x f(x)$.
3. Soit $f \in E$. Montrer que :
$$\sup_{0\leq x\leq 1} |f'(x)| \leq (1+e)N_1(f).$$
4. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
5. Les deux normes sont-elles équivalentes ?

Correction du CC2

Exercice 1

1. Faux : L'ensemble donné A n'est pas convexe et donc ne peut pas être une boule fermée (unité) pour une norme sur $\mathbb{R}^2$.
   On voit d'après le dessin que A n'est pas convexe, il existe $u,\ v \in A$ tel que $[u,v] = \{(1-t)u + tv; t \in [0,1]\} \not\subset A$.
   On prend par exemple $u = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in A$, $v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in A$. On a $(0, \frac{1}{2}) \in [u,v]$ $((0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v)$ et $(0, \frac{1}{2}) \notin A$.

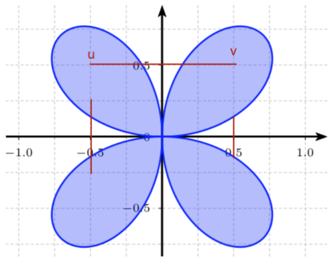

FIGURE 2 –

2. Vrai : $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie (égale à $n+1$), par suite d'après le cours, toutes les normes sur $\mathbb{R}_n[X]$ sont deux à deux équivalentes.

Exercice 2

1. On suppose qu'il exsite une fonction y somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de (E) avec (CI) sur $]-R, R[$. On a pour tout $x \in]-R, R[$,
$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
   Comme $a_0 = y(0)$ et $a_1 = y'(0)$, on déduit de (CI) que $a_0 = a_1 = 0$.

2. On a pour tout $x \in]-R, R[$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.
   En remplaçant dans (E), on obtient pour tout $x \in]-R, R[$
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$$
   càd
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1.$$
   Par suite
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n\right] x^n = 1 \quad \forall x \in]-R, R[$$
   Par unicité du DSE, on a donc (pour $n=0$), $2a_2 + a_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0$ càd $a_{n+2} = -\frac{1}{n+2} a_n$. On a alors
$$a_n = \frac{-1}{n} a_{n-2} \quad \text{pour tout} \ \ n \geq 3. \tag{1}$$
   et comme $a_0 = 0$ et $2a_2 + a_0 = 1$, on a donc $a_2 = \frac{1}{2}$.
   Deux cas :

   i) Si $n = 2k+1$ impair, on a d'après (1), pour tout $k \geq 1$, $a_{2k+1} = \frac{-1}{2k+1} a_{2k-1}$. Comme $a_1 = 0$, on déduit alors (par récurrence) $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 0$.

ii) Si $n = 2k$ pair, $n \geq 4$ donc $k \geq 2$, on a d'après (1), pour tout $k \geq 2$, $a_{2k} = \frac{-1}{2k} a_{2k-2}$. Donc

$$
\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{-1}{2k} a_{2k-2} \\
a_{2k-2} &= \frac{-1}{2k-2} a_{2k-4} \\
&\vdots \\
a_4 &= \frac{-1}{4} a_2.
\end{aligned}
$$

En multipliant ces $k-1$ égalités, on obtient pour tout $k \geq 2$,

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}(2 \times 3 \times ... \times k)} a_2 = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!}$$

comme $a_2 = \frac{1}{2}$. Cette égalité reste vraie pour $k = 1$ et on a donc

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} \quad \forall k \geq 1.$$

Par suite

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} x^{2k}.$$

En remontant les calculs, on vérifie que y est solution de (E) avec (CI) sur $]-R, R[$ à condition que $R > 0$.

3. Calculons le rayon de convergence R de $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} x^{2k} = \sum_{k \geq 1} b_k x^{2k}$ (avec $b_k = a_{2k}$ pour tout $k \geq 1$).

1ère méthode : Soit R_1 est le rayon de convergence de $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} x^k = \sum_{k \geq 1} b_k x^k$.

Calculons R_1. On a $b_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{2^k}{2^{k+1}} \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{2(k+1)} \underset{k \to +\infty}{\to} l_1 = 0.$$

Par suite $R_1 = +\infty$ et donc $\sum_{k \geq 1} b_k x^k$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En posant $X = x^2$, on déduit alors que $\sum_{k \geq 1} b_k X^k = \sum_{k \geq 1} b_k x^{2k}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $R = +\infty$.

2ème méthode pour R : On va appliquer la règle de D'Alembert pour les séries numériques pour les $x \neq 0$ pour calculer R directement.

La série numérique $\sum_{k \geq 1} b_k x^{2k}$ converge absolument en $x = 0$ (ici $\sum_{k \geq 1} |b_k| 0^{2k} = 0$) et pour $x \neq 0$,

$$\frac{|b_{k+1} x^{2k+2}|}{|b_k x^{2k}|} = \frac{2^k}{2^{k+1}} \frac{k!}{(k+1)!} x^2 = \frac{x^2}{2(k+1)} \underset{k \to +\infty}{\to} 0 < 1$$

Comme $l = 0 < 1$, on déduit de la règle de D'Alembert que $\sum_{k \geq 1} b_k x^{2k}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et par suite pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $R = +\infty$.

Par suite, y est l'unique solution de (E) $+(CI)$ sur $]-R, R[= \mathbb{R}$.

Remarque : L'unicité de la solution est due au fait que (E) est une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients continues avec le coefficient de y'' ne s'annulant pas, ici c'est la fonction constante égale à 1, et donc avec (CI), elle admet une solution unique d'après le Théorème de Cauchy-Lispchitz.

4. On va exprimer maintenant y à l'aide des fonctions usuelles.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($R = +\infty$),

$$y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!} x^{2k} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\frac{-x^2}{2})^k}{k!} = -(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Exercice 3

1. Soit $g \in E$. Comme $g(0) = 0$, on a alors pour tout $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \left| \int_0^x g'(t)dt \right| \\ &\leq \int_0^x |g'(t)|dt \\ &\leq \int_0^1 |g'(t)|dt \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |g'(t)| \int_0^1 dt \\ &= \sup_{t \in [0,1]} |g'(t)| \end{aligned}$$

   On a donc montré que $|g(x)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |g'(t)|$ pour tout $x \in [0, 1]$.
   Par suite, comme $\sup_{x \in [0,1]} |g(x)|$ est le plus petit majorant de $\{|g(x)|,\ x \in [0, 1]\}$, on obtient

$$\sup_{x \in [0,1]} |g(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |g'(x)| \quad \forall g \in E.$$

2. Pour $f \in E$, posons $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tel que $g(x) = e^x f(x)$.
   On a g est C^1 sur $[0, 1]$, $g(0) = f(0) = 0$ donc $g \in E$ avec $g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$ pour tout $x \in [0, 1]$.
   On a pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= e^{-x}|g(x)| \\ &\leq |g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} |g'(x)| \\ &= \sup_{x \in [0,1]} e^x|f(x) + f'(x)| \\ &\leq e \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + f'(x)| \\ &= eN_1(f) \end{aligned}$$

   où on a utilisé 1. dans la 3ème inégalité et le fait que pour $x \in [0, 1]$, $e^{-x} \leq 1$ et $e^x \leq e$ (donc pour tout $x \in [0, 1]$, $e^x|f(x) + f'(x)| \leq e \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + f'(x)|$, on obtient donc la dernière inégalité en passant au sup sur les $x \in [0, 1]$).
   On a donc montré que $|f(x)| \leq eN_1(f)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
   Par suite,

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq eN_1(f) \quad \forall f \in E$$

3. On a pour tout $f \in E$ et pour $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |f'(x) + f(x) - f(x)| \\ &\leq |f'(x) + f(x)| + |f(x) \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} |f'(x) + f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \\ &\leq N_1(f) + eN_1(f) \\ &= (1 + e)N_1(f) \end{aligned}$$

où on a utilisé 2.
On a donc montré que $|f'(x)| \leq (1+e)N_1(f)$ pour tout $x \in [0,1]$. Par suite,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq (1+e)N_1(f) \quad \forall f \in E.$$

4. a. N_1 est bien une application à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. En effet, soit $f \in E$, f et f' continues sur $[0,1]$, donc $f+f'$ l'est aussi et par suite $f+f'$ bornée sur $[0,1]$. Il existe alors $M \geq 0$, tel que $|f(x)+f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc

$$0 \leq N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+f'(x)| \leq M < +\infty.$$

i) Séparation : Si $f = 0_E$, $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$, donc

$$N_1(0_E) = \sup_{x\in[0,1]} |0| = 0. \tag{2}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+f'(x)| = 0 &\Longleftrightarrow |f(x)+f'(x)| = 0 \quad \forall x \in [0,1] \\ &\Longrightarrow f(x)+f'(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \\ &\Longrightarrow \exists\, C \in \mathbb{R};\ f(x) = Ce^{-x} \quad \forall x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Comme $f(0) = 0$, on déduit que $C = 0$ et par suite $f(x) = 0$ pout tout $x \in [0,1]$ et donc $f = 0_E$.

Par suite

$$N_1(f) = 0 \Longrightarrow f = 0_E. \tag{3}$$

Remarque : On aurait pu aussi utiliser 2. pour montrer que $N_1(f) = 0 \Longrightarrow f = 0_E$.

(2) et (3) nous donnent $N_1(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0_E$.

ii) Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in E$,

$$\begin{aligned} N_1(\lambda f) &= \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x) + (\lambda f)'(x)| \\ &= \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x) + \lambda f'(x)| \\ &= \sup_{x\in[0,1]} |\lambda||f(x)+f'(x)| \\ &= |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+f'(x)| \\ &= |\lambda| N_1(f) \end{aligned}$$

où on a utilisé dans l'avant dernière égalité le fait que $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$ si $\alpha \geq 0$ (ici $\alpha = |\lambda|$).

iii) Inégalité triangulaire : Soient $f, g \in E$. D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |(f+g)(x)+(f+g)'(x)| = |f(x)+g(x)+f'(x)+g'(x)| &\leq |f(x)+f'(x)| + |g(x)+g'(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)+g'(x)| \\ &= N_1(f) + N_1(g). \end{aligned}$$

On a donc montré que $|(f+g)(x)+(f+g)'(x)| \leq N_1(f)+N_1(g)$ pour tout $x \in [0,1]$. Par suite,

$$N_1(f+g) = \sup_{x\in[0,1]} |(f+g)(x)+(f+g)'(x)| \leq N_1(f)+N_1(g)$$

pour tout $f, g \in E$.

D'où N_1 est une norme sur E.

b. N_2 est bien une application à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. En effet, soit $f \in E$, f et f' continues sur $[0,1]$ et donc bornées. Il existe alors $M, M' \geq 0$, tel que $|f(x)| \leq M$ et $|f'(x)| \leq M'$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc

$$0 \leq N_2(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq M + M' < +\infty.$$

i) Séparation : Si $f = 0_E$, $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$, donc

$$N_2(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 0. \tag{4}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} N_2(f) = 0 &\iff \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 0 \\ &\iff \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0 \text{ et } \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 0 \\ &\iff |f(x)| = 0 \text{ et } |f'(x)| = 0 \quad \forall x \in [0,1] \\ &\implies f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \\ &\implies f = 0_E \end{aligned} \tag{5}$$

(Remarque : On aurait pu rester avec des équivalences).
(4) et (5) nous donnent $N_2(f) = 0 \iff f = 0_E$.

ii) Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in E$,

$$\begin{aligned} N_2(\lambda f) &= \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |(\lambda f)'(x)| \\ &= \sup_{x\in[0,1]} |\lambda|\,|f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |\lambda|\,|f'(x)| \\ &= |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \\ &= |\lambda| N_2(f) \end{aligned}$$

où on a utilisé dans l'avant dernière égalité le fait que $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$ si $\alpha \geq 0$ (ici $\alpha = |\lambda|$).

iii) Inégalité triangulaire : Soient $f, g \in E$. D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \in [0,1]$,

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$$

et de même

$$|(f+g)'(x)| = |f'(x) + g'(x)| \leq |f'(x)| + |g'(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)|.$$

Par suite,

$$\sup_{x\in[0,1]} |(f+g)(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$$

et

$$\sup_{x\in[0,1]} |(f+g)'(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)|.$$

D'où

$$N_2(f+g) = \sup_{x\in[0,1]} |(f+g)(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |(f+g)'(x)| \leq N_2(f) + N_2(g)$$

pour tout $f, g \in E$.

Par suite, N_2 est une norme sur E.

5. D'après 2. et 3., on a pour tout $f \in E$, $N_2(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq (1+2e)N_1(f)$.

D'autre part, pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |f'(x) + f(x)| &\leq |f'(x)| + |f(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \\ &= N_2(f). \end{aligned}$$

Par suite, $N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)| \leq N_2(f)$.
Conclusion : On a donc montré que pour tout $f \in E$

$$N_1(f) \leq N_2(f) \leq (1 + 2e)N_1(f).$$

D'où N_1 et N_2 sont équivalentes.