Corrigé CC1 Analyse 4

exo 1 $f_n :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{-n/x}$

a) CVN de $\sum f_n$ sur $I =]0,1[$: OUI

$x \mapsto \frac{n}{x}$ est une fonction décroissante sur $]0,\infty[$, donc $x \mapsto -\frac{n}{x}$ croissante et

$f_n(x) = e^{-n/x}$ croissante aussi

On trouve donc $\|f_n\|_\infty = f_n(1) = e^{-n}$ sur $]0,1[$

et $\sum_n \|f_n\|_\infty = \sum_n e^{-n}$ converge comme

série géométrique de raison $|q| = e^{-1} < 1$.

b) CVN de $\sum_n f_n$ sur $J = [1,\infty[$: NON

on pose $x_n = n \in J$, $n \geq 1$

et on constate que $f_n(x_n) = e^{-\frac{n}{n}} = e^{-1} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

Donc $\|f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$ et la série ne

converge pas normalement.

---

exo 2 $x \in \mathbb{R}_+$, $n \geq 1$, $f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{nx+1}$

a) le dénominateur $nx+1$ est bien différent de 0

Il suffit donc d'étudier la CVS de $\sum f_n$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{nx+1}$ est une série altenée

On vérifie donc le CSA pour $u_n = \frac{x}{nx+1}$

① $\frac{x}{nx+1} \geq 0$ ✓

② $u_{n+1} \leq u_n$ ✓ $\left((n+1)x + 1 > nx + 1 \right)$

③ $\lim_{n \to \infty} \frac{x}{nx+1} = 0$ ✓

Par le CSA, $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est bien definie sur $\mathbb{R}_+$

b) On utilise le thm du cours pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \infty[$

Comme la CVS de $\sum f_n$ sur $[1, \infty[$ était déja vérifiée dans a) et f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ comme fraction rationnelle, il reste à vérifier CVU pour $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$

On calcule $f_n'(x) = \left((-1)^n \frac{x}{nx+1} \right)' =$

$$= (-1)^n \frac{(nx+1) \times 1 - x \times n}{(nx+1)^2}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{(nx+1)^2}$$

On constate que $\|f_n'\|_\infty = \left\| \frac{1}{(nx+1)^2} \right\|_\infty = \frac{1}{(n+1)^2}$

parce que $\frac{1}{(nx+1)^2}$ est décroissante sur $[1, \infty[$

Pourtant, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge comme série de Riemann à l'exposant $\alpha = 2 > 1$.

On a donc CVN de $\sum f_n'$ qui implique CVU ce qui termine la preuve.

exo 3

a) $\sum_n \frac{2^n + n}{n^2+1} z^n$

On remplace le coefficient par un équivalent plus simple ce qui ne change pas le RDC.

$$\frac{2^n + n}{n^2+1} \sim \frac{2^n}{n^2} \quad \text{pour } n \to \infty$$

Il suffit donc de regarder $\sum_n \frac{2^n}{n^2} z^n$

Par le critère de Cauchy, on obtient :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$

Donc, $\boxed{R = \frac{1}{2}}$

b) $\sum_n \frac{z^{3n}}{(2n)!}$, On pose $w = z^3$ et on étudie $\sum_n \frac{w^n}{(2n)!}$

Par le critère de d'Alembert, on obtient pour le RDV r de cette série que

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

On conclut que $r = \infty$ et la série converge pour tout $w = z^3$, donc aussi pour tout z.

Le rayon de convergence de la série originale est donc $\boxed{R = \infty}$

c) $$\sum_n \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}\right)^n z^n$$

Par le critère de Cauchy et l'équivalence $n^2+1 \sim n^2$, on obtient :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc, $R = 2$.

d) $$\sum_n z^{n^3}$$

On constate que la série diverge pour $z=1$, donc $R \leq 1$.

Mais pour $|z|<1$, on a la majoration

$$\sum_n |z|^{n^3} < \sum_n |z|^n$$ qui est une série géométrique de raison $|z|<1$, donc convergente.

Alors, $R \geq 1$.

On conclut que $\boxed{R = 1}$.

exo 4 Domaine de convergence dans $\mathbb{C}$ de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

Par le critère de d'Alembert, on constate d'abord que $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, donc $R = \frac{1}{1} = 1$

Il reste à étudier $|z| = 1$

Si $z = 1$, on a la série harmonique qui diverge

Si $|z| = 1$, $z \neq 1$, on applique le critère d'Abel :

$u_n = \frac{1}{n}$:

1. $u_n \geq 0$ ✓ $\qquad \frac{1}{n} \geq 0$
2. $u_{n+1} \leq u_n$ ✓ $\qquad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$
3. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ✓ $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$V_n = z^n \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z - z^{n+1}}{1-z}$

et $|S_n| = \left| \frac{z - z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{|z| + |z|^{n+1}}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}$

inégalité triangulaire

On constate que S_n est bien bornée.

Le critère d'Abel donne donc bien la convergence

Resumé :

Le domaine de convergence est

$$\{z : |z| \leq 1\} \setminus \{1\}.$$