Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre printemps 2020–2021**

L2 | UE : Analyse IV

CC1 Analyse 4 du mardi 9 mars 2021

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Exercice 1 (4 pts) Pour $n \geq 0$, soit $f_n :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^{-n/x}$. La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge-t-elle normalement sur

a. $I =]0, 1[$

b. $J = [1, \infty[$?

Exercice 2 (6 pts) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x}{nx+1}$.

a. Montrer que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \infty[$.

Exercice 3 (6 pts) Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

a. $\displaystyle\sum_n \frac{2^n + n}{n^2+1} z^n$.

b. $\displaystyle\sum_n \frac{z^{3n}}{(2n)!}$.

c. $\displaystyle\sum_n \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}\right)^n z^n$

d. $\displaystyle\sum_n z^{n^3}$

Exercice 4 (4 pts) Déterminer le domaine de convergence dans $\mathbb{C}$ de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$