

Questions possible pour l'oral d'algèbre IV

1) Quelle est la définition d'une forme bilinéaire?

Quelles formes bilinéaires ne sont pas des produits scalaires?

Donnez un exemple d'une forme bilinéaire qui n'est pas un produit scalaire.

Propriété de la matrice du produit scalaire sur \mathbb{R}^2 ? Écrire la matrice du produit scalaire dans une base orthonormée de \mathbb{R}^2 .

2) Énoncer l'inégalité Cauchy-Schwarz dans l'espace \mathbb{R}^2 avec le produit scalaire canonique (b.o.u., $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, produit

$$\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rangle = xx' + yy'$$

3) Définir "vecteur orthogonal à un sous-espace".

Énoncer le théorème de Pythagore en \mathbb{R}^3 .

Qu'est-ce que l'identité de parallélogramme (pourquoi une telle appellation?)

4) Soit A et B deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Comment définir le cosinus de l'angle entre A et B ?
La projection $P_B(A)$ de A sur B et $P_A(B)$ de B sur A ? Quand est-ce que $|P_A(B)| = |P_B(A)|$? $A = P_A(B)$?
Quand est-ce que $|A| = |P_B(A)|$?

5) Soit X - un point de \mathbb{R}^3 et P - un sous-espace de \mathbb{R}^3 de dim 2 t.q. $X \notin P$. Qu'est-ce que c'est P ? (Plan, droite? passant par...)

Comment trouver la distance de X à P ?

6) Pour quelles questions on utilise la méthode de moindres carrés? Donner un exemple d'un système et la formule de soln. de moindres carrés.

7) Soit P - l'endomorphisme de projection orthogonale dans \mathbb{R}^3

sur un plan passant par l'origine. Quel est le rang de P ? Quel est le noyau?

Quelle base il faut choisir pour que la matrice de P soit d'une forme la plus simple possible?

Propriété de P ? ($P^2 = P$)

8] Symétrie orthogonale dans \mathbb{R}^3 .
Donner un exemple.

Quelle sont les sous-espaces invariants?

Matrice de la symétrie orthogonale dans une base adaptée en forme la plus simple.

Propriété $S^2 = \text{Id}$.

9] On considère l'espace dual E^* de $E = \mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire standard. Quels sont les éléments de E^* . Comment on les définit?

Qu'est ce que c'est une base de E^* ?
Donner un exemple.

10] Définir la notation d'un

endomorphisme adjoint. Soit un endom. $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans une b.o.n.

Quel est la matrice de φ^* ?

11) Soit $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorphisme inversible. φ^{-1} son inverse.

Donner des exemples de φ t.g. a) $\varphi^{-1} = \varphi^*$,

b) $\varphi^{-1} = \varphi$ (autre que l'identité).

c) Un endomorphisme qui n'a pas d'inverse, mais t.g. $\varphi^* = \varphi$.

12) Définir matrice orthogonale.

(3 définitions équivalentes!)

Donner des exemples dans \mathbb{R}^2 , dans \mathbb{R}^3

(not = Id
ou en sur)

Expliquer la

différence entre les mots:

isométrie, symétrie, rotation.

Dans \mathbb{R}^2 , pour une rotation

y a-t-il des sous-esp invariants?

Quels sont les valeurs propres (réelles)

8) complexes possibles d'une rotation dans \mathbb{R}^2 ?

13] Définition et exemples des groupes: groupe fini, groupe infini...
groupe par addition, par multiplication.
Exemple: isométries du triangle équilatéral...

14] Décrire les éléments du groupe $O_2(\mathbb{R})$. Pourquoi c'est un groupe?

15] Groupe $O(3)$ - définition exemples...
axe et angle d'une rotation
Comment les trouver.

Quel est le plan d'une rotation décrite par une axe et angle ?

16] Exemple d'un endom. symétrique et orthogonal dans \mathbb{R}^2 ($\neq \text{Id}$)
Le représenter géométriquement...

17] Théorème spectral - formules.
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ - qu'est ce qui ne marche pas pour cette matrice?

18] Donner une recette comment construire une infinité des matrices symétriques positives.
(symétrique positives donner une définiton)

19] Qu'est ce que la décomposition polaire? Analogie en dimension 2 de la décomp. polaire.