$E=\mathbb{R}^n$, $\beta : E\times E \to \mathbb{R}$ $\underbrace{\text{bilin.}}$ $\underbrace{\text{symétrique}}$ & $\underbrace{\text{défini positif}}$: produit scalaire.

$\beta(u+\lambda u', u'')$
$= \beta(u,u'') + \lambda\, \beta(u',u'')$
idem pour l'autre composante

$\beta(u,u') = \beta(u',u)$

$\beta(u,u) \geq 0$.
$\beta(u,u)=0$
$\Rightarrow u=0$.

<u>Exo 4.</u> 2. $\beta : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\beta\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right) = axx' + 2bxy' + 2byx' + byy'$, $a,b\in\mathbb{R}$

Q : CNS sur a,b pour que β soit un produit scalaire.

bilin. sym. ✓

<u>Défini positif :</u> si $a\leq 0$ $\beta\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = a \leq 0$

$\Rightarrow a>0$

$$\beta\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = ax^2+4bxy+by^2 = a\left(x^2+\frac{4b}{a}xy\right) + by^2$$
$$= a\left(x^2+\frac{4b}{a}xy+\left(\frac{2b}{a}y\right)^2\right) - \frac{4b^2}{a}y^2 + by^2$$
$$= a\left(x+\frac{2b}{a}y\right)^2 + b\left(1-4\frac{b}{a}\right)y^2.$$

pour $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ t.q. $x=-\frac{2b}{a}y$, $y\neq 0$. $\beta\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = b\left(1-\frac{4b}{a}\right)y^2 > 0$

$\Rightarrow b\left(1-\frac{4b}{a}\right)>0$.

Conclusion :

β défini positif $\Rightarrow \begin{cases} a>0. \\ b\left(1-\frac{4b}{a}\right)>0. \end{cases}$ $(*)$

$(*) = $ CN

cette CN est aussi une CNS. car

si $(*)$ dans $\beta\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\geq 0$.

et si $\beta\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=0$

$\Rightarrow y=0,\ x+\frac{2b}{a}y=0 \Rightarrow \underline{y=0,\ x=0}$.

Exo 4. 3.

$\mathbb{C}$: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$, bij. $\mathbb{R}$-linéaire.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x+iy$

$\mathbb{C}$ = esp vect. sur $\mathbb{R}$ de dim 2 de base $(1, i)$ | $z = x+iy$, $\bar{z} = x - iy$

Mq $b : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

$(\alpha, \beta) \longmapsto b(\alpha,\beta) = \mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta})$

$\alpha = x+iy$, $\beta = x'+iy'$ $\quad b(\alpha,\beta) = \mathrm{Re}\left((x+iy)(x'-iy')\right)$

$= \mathrm{Re}\left(xx'+yy' + i(-xy'+yx')\right) = xx'+yy'$

$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ $\quad \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \xrightarrow{b} \mathbb{R}$ $\quad$ b.l. sym.

$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \longmapsto xx'+yy'$ $\quad b\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2+y^2 \geq 0$

$= 0 \implies x = y = 0$

produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$

Rappel du cours : $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ produit scalaire.

la famille $(v_1, \dots, v_n)$, $v_i \in E$, est orthogonale pour φ

si $\forall\, i \neq j$, $\varphi(v_i, v_j) = 0$

la norme de $v \in E$, $\|v\| = \sqrt{\varphi(v,v)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$(v_1, \dots, v_n)$ est orthonormée si $\forall\, i, j$ $= \varphi(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$\left(\|v_i\| = 1 \right)$

$\mathbb{R}_n[X]$ l'ens. des polyn. de degré au plus n.

$P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$, $a_i \in \mathbb{R}$

si $P \neq 0$, alors P a au plus n racines réelles ou complexes.

Exercice 5 1. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(P, Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$

$P(k) = a_0 + a_1 k + \cdots + a_n k^n \in \mathbb{R}$

φ bil.

$$\varphi(P_1 + \lambda P_2, Q) = \sum_{k=0}^{n} (P_1 + \lambda P_2)(k) \; Q(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (P_1(k) + \lambda P_2(k)) Q(k) = \sum_{k=0}^{n} P_1(k) Q(k) + \lambda \sum_{k=0}^{n} P_2(k) Q(k)$$

$$= \varphi(P_1, Q) + \lambda \varphi(P_2, Q)$$

idem pour $\varphi(P, Q_1 + \lambda Q_2)$

φ sym. $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$

φ déf. positive : $\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 \geq 0$.

$\varphi(P, P) = 0 \iff \forall k \in \{0, \ldots, n\}$ $P(k) = 0$. $P(0) = P(1) = \cdots = P(n) = 0$

$\begin{cases} \beta(u,u) \geq 0 \quad \forall u \in E \\ \beta(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$

donc P de degré $\leq n$ a $n+1$ racines $\neq$

$\Rightarrow P = 0$

si $P \neq 0$ alors P a au plus n racines $\neq$

Ex 5

2. $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $M_n(\mathbb{R}) = \{M$ matrices $n \times n$ à coeff. réels$\}$

$M_n(\mathbb{R})$ = esp vect. sur $\mathbb{R}$. $M = (m_{ij})$, $N = (n_{ij})$

$M + N = (m_{ij} + n_{ij})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda M = (\lambda m_{ij})$.

$M_n(\mathbb{R})$ est de dim n^2 de base $(E_{ij})_{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2}$

$$E_{ij} = \begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{bmatrix} & \\ & 1 \\ & \end{bmatrix} \end{array} \quad (0 \text{ ailleurs})$$

<u>base canonique</u>

ex : $M_2(\mathbb{R})$, $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Mq $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire

$(A, B) \longmapsto tr({}^tAB)$

$\varphi : M_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R} : (A,B) \longmapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$

rappel : $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$, $M = (m_{ij})$, ${}^tM = (\mu_{ij})$

$\mu_{ij} = m_{ji}$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$,

$$\mathrm{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ({}^tA)_{ij}(B)_{ji} = \sum_i\sum_j a_{ji} b_{ji}$$

φ bilin, φ sym.

définie positive : $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_i\sum_j a_{ji}a_{ji} = \sum_{i,j} a_{ji}^2 \geq 0.$

$\mathrm{tr}({}^tAA) = 0 \iff \forall\, i,j,\ a_{ji} = 0 \iff$ A est la matrice nulle.

(E_{ij}) la base canon de $M_n(\mathbb{R})$ est-elle orthonormée pour φ ?

(E_{ij}) orthonormée pour φ ?

$$E_{ij} = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{bmatrix} & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad {}^tE_{ij} = E_{ji}$$

$$\varphi(E_{ij}, E_{hl}) = \mathrm{tr}\left({}^tE_{ij} E_{hl}\right) = \mathrm{tr}\left(E_{ji} E_{hl}\right)$$

$$E_{ji} E_{hl} = \begin{array}{c|c} & i \\ \hline j & \begin{bmatrix} & \\ & 1 \\ & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & l \\ \hline & \begin{bmatrix} & \\ & 1 \\ & \end{bmatrix} \\ h & \end{array} = \begin{array}{c|c} & l \\ \hline j & \begin{bmatrix} & \\ & \delta_{ih} \\ & \end{bmatrix} \end{array} = \delta_{ih} E_{jl}$$

$$E_{ji} E_{hl} = \delta_{ih} E_{jl}$$

$$\varphi(E_{ij}, E_{hl}) = \mathrm{tr}(\delta_{ih} E_{jl}) = \delta_{ih}\, \mathrm{tr}(E_{jl})$$
$$= \delta_{ih}\, \delta_{jl}$$

$\Rightarrow$ la base (E_{ij}) est orthonormée pour φ.

PAUSE : $\to$ 15:20

Exo 5 3. $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}) \ni f$ $\quad f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue.

$b : E \times E \to \mathbb{R}$
$(f,g) \longmapsto$ $\quad b(f,g) = \int_{-1}^{+1} f(t)g(t)\underbrace{(1-t^2)}_{\geq 0}\,dt$ $\quad$ = produit scalaire.

pour le voir regardez Exo 4 f.c

$\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

Exo 6 **Cauchy-Schwarz.** Si $b : E \times E \to \mathbb{R}$ produit scalaire.

$$|b(u,u')|^2 \leq b(u,u)\, b(u',u')$$ avec égalité ssi (u,u') est lié.

Mq si $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\left(\int_a^b |f(t)|\, dt\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(t)^2\, dt.$$

idée : C-S pour $b(f,g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$

C.S : $$\left(\int_a^b f(t) g(t)\, dt\right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2\, dt \int_a^b g(t)^2\, dt$$

utiliser pour l'appli $t \to |f(t)|$ et $t \to g(t) = 1$.

$$\left(\int_a^b |f(t)|\, dt\right)^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2\, dt \int_a^b dt = (b-a) \int_a^b f(t)^2\, dt$$

C.S. $\quad |b(u,u')|^2 \le b(u,u)\, b(u',u')$

$=$ ssi (u,u') lié.

ici $\quad \left|\int_a^b g(t)g(t)\,dt\right|^2 = \int_a^b g(t)^2\,dt \int_a^b g(t)^2\,dt$ ssi (g,g) est lié

ssi $\exists(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, $\forall t$ $\alpha g(t)+\beta g(t)=0$.

Dans notre cas $g(t)\longrightarrow |g(t)|$ $\quad g(t) = 1$.

$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ C^0.

$|g| : [a,b]\to\mathbb{R}$ C^0

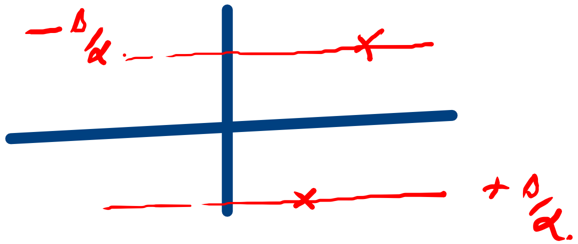
$\exists\alpha,\beta,\ \forall t,\ \alpha\,|g(t)| + \beta = 0$.

$\left[\exists\alpha,\beta,\ \forall t\quad |g(t)| = -\frac{\beta}{\alpha}\right]$

$\forall t,\ |g(t)| = -\beta/\alpha$

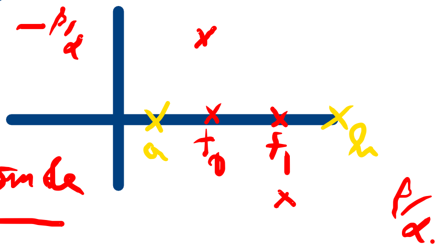
$\forall t,\ g(t) = -\beta/\alpha$

ou $\forall t,\ g(t) = \beta/\alpha$ $\quad\Leftarrow$



Supposons que pour $t_0\in[a,b]$, $g(t_0) = -\beta/\alpha$, pour $t_1\in[a,b]$ $g(t_1) = \beta/\alpha$

g est C^0 $\Longrightarrow$ [par le théorème des valeurs intermédiaires] g prend toute valeur entre $-\beta/\alpha$ et β/α. Absurde



Exo 13. *famille orthogonale d'applications.*

$E = C([0,1], \mathbb{R})$, $b(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$

pour $n \in \mathbb{N}$, $h_n : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto \cos(2\pi n t)$

1. Mq la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour b.

$b(h_n, h_m) = ?$ pour $n \neq m$ | $n \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq m$ $\quad b(h_n, h_m) = \int_0^1 h_n(t)\, h_m(t)\,dt$

$= \int_0^1 \cos(2\pi n t)\cos(2\pi m t)\,dt$

$\int$ par partie

$(uv)' = u'v + uv'$

1/ $\boxed{n \neq 0,\ m \neq 0,\ n \neq m}$

$$J = \int_0^1 \cos(2\pi m t)\cos(2\pi n t)\,dt \qquad u = \cos 2\pi m t \quad u' = -2\pi m \sin 2\pi m t$$

$$v' = \cos 2\pi n t \quad v = \frac{1}{2\pi n}\sin 2\pi n t$$

$$J = \frac{1}{2\pi n}\cancel{\cos 2\pi m t \sin 2\pi n t\Big|_0^1}_{0} + \frac{\cancel{2\pi} m}{\cancel{2\pi} n}\int_0^1 \sin 2\pi m t \sin 2\pi n t\, dt$$

$$u = \sin 2\pi m t \quad u' = 2\pi m \cos 2\pi m t$$

$$v' = \sin 2\pi n t \quad v = \frac{-1}{2\pi n}\cos 2\pi n t$$

$$\int_0^1 h_n(t) h_m(t)\,dt = \frac{m}{n}\left\{ \cancel{-\frac{1}{2\pi n}\sin 2\pi m t \cos 2\pi n t\Big|_0^1}_{0} \right.$$

$$+ \frac{m}{n}\int_0^1 \cos 2\pi m t \cos 2\pi n t\, dt$$

$m \neq n.$

$$J = \frac{m^2}{n^2} J$$

$$\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) J = 0 \Rightarrow J = 0$$

1/ +

2/

$\forall\ n \neq m$

$b(h_n, h_m) = 0.$

2/ $\boxed{n = 0 \quad m \neq 0.}$

$$\int_0^1 \cos 2\pi m t\, dt = \int_0^1 h_0(t)\, h_m(t)\, dt = b(h_0, h_m)$$

$$= \frac{1}{2\pi m} \sin 2\pi m t\Big|_0^1 = 0.$$

$E = C([0,1],\mathbb{R})$

Exo 13. 2. $h_n : [0,1] \to \mathbb{R} : t \mapsto h_n(t) = \cos(2\pi n t)$. Par le 1.

$\forall m \neq n$, $b(h_n, h_m) = 0$.

Mq E n'est pas de dimension finie : on commence par mq $\forall n \geq 1$, la famille $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ est libre dans E. Supposons que $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ soient tels que $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \dots + \lambda_n h_n = 0$ (i.e. $\forall t \in [0,1]$ $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k(t) = 0$)

Pour $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $0 = b(h_i, 0) = b\left(h_i, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b(h_i, h_k)$

$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta_{ik} b(h_i, h_i)$

$= \lambda_i \underbrace{b(h_i, h_i)}_{>0} \Rightarrow \lambda_i = 0$. $(h_1, \dots, h_n)$ est donc libre.

Si E était de dimension finie n_0 sur $\mathbb{R}$, toute famille de cardinal $> n_0$ serait liée. Et ceci contredit le fait $(h_1, h_2, \dots, h_{n_0}, h_{n_0+1})$ est libre.

Remarque : ce qui précède est général.

Si $\langle\,,\,\rangle : E\times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire, toute famille $(v_1, \dots, v_n)$ orthogonale d'éléments $v_i \in E$ ($\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$) est libre.

La preuve est la même que plus haut.