Rappel : E = esp. vect. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dim finie $n \geq 1$

$(E \simeq \mathbb{K}^n)$ $\quad \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E.

$u \in E$, $\quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad (x_1, \dots, x_n)$ = comp. de u dans $\mathcal{B}$.

Forme bilinéaire : $\beta : E \times E \longrightarrow \mathbb{K} : (u,u') \longmapsto \beta(u,u')$

$\forall u, u', u'' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \beta(u+\lambda u', u'') = \beta(u,u'') + \lambda \beta(u',u'')$

$$\beta(u, u'+\lambda u'') = \beta(u,u') + \lambda \beta(u,u'')$$

$$\beta(u,u') = \beta\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j x'_j e_j\right) = \sum_i \sum_j x_i x'_j \, \beta(e_i, e_j)$$

Définir $\beta \iff$ se donner $[\beta]_{\mathcal{B}} = \left(\beta(e_i, e_j)\right) \in M_n(\mathbb{K})$

Exo 1 $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left(e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ (base canonique)

$u = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$, $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$\beta(u, v) = aa' + 2ab' + 4ba' + 5bb'$

1. $M = [\beta]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \beta(e_1,e_1) & \beta(e_1,e_2) \\ \beta(e_2,e_1) & \beta(e_2,e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

2. a) $\mathcal{B}' = \left(f_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ nouvelle base

$M' = [\beta]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \beta(f_1,f_1) & \beta(f_1,f_2) \\ \beta(f_2,f_1) & \beta(f_2,f_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

2.b) Rappel : matrice de passage P de B à B'

$$\boxed{f_1 = p_{11} e_1 + p_{21} e_2} = e_1 + e_2$$

$$f_2 = p_{12} e_1 + p_{22} e_2 = e_1 - e_2$$

$$P = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} p_{11} \\ p_{21} \end{matrix}} & \begin{matrix} p_{12} \\ p_{22} \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M' = [\beta]_{B'} \overset{\text{Exo 3}}{=} {}^tP [\beta]_B P = {}^tP M P$$

$$= {}^t\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Rappel : si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, ${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

2.c) Écrire M comme somme d'une matrice sym. et d'une matrice antisym.

Rappel : $A \in M_n(\mathbb{K})$, A sym : ${}^tA = A$; A antisym : ${}^tA = -A$

Astuce : $M = \underbrace{\dfrac{M + {}^tM}{2}}_{\text{sym.}} + \underbrace{\dfrac{M - {}^tM}{2}}_{\text{antisym}}$

${}^t(M + {}^tM) = {}^tM + {}^{tt}M = {}^tM + M$

${}^t(M - {}^tM) = {}^tM - {}^{tt}M = {}^tM - M$
$= -(M - {}^tM)$

ici : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right)$

$[\beta]_B = M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Définis deux formes bilinéaires β_S et β_A en posant

$[\beta_S] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $[\beta_A] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\beta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}\right) = \beta_S\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}\right) + \beta_A\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}\right)$

$\beta_S(u,v) = \beta_S(v,u)$
sym

$\beta_A(u,v) = -\beta(v,u)$
antisym.

Exo 2. $E=\mathbb{R}^3$, $\phi : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3$.

$B_0=\left(e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ base canonique.

$$M=[\phi]_{B_0}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

1. $B=\left(h_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, h_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, h_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$ nouvelle base.

$$M'=[\phi]_B=\begin{bmatrix}\phi(h_1,h_1)&\phi(h_1,h_2)&\phi(h_1,h_3)\\ -- & -- & --\\ -- & -- & --\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&-4\\0&6&2\\-4&2&6\end{bmatrix}$$

Rem: $\phi(\vec{x},\vec{y})=\phi(\vec{y},\vec{x}) \longleftarrow$ symétrique.

2. matrice de passage de B_0 à B : $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}$

$$M'=[\phi]_B={}^tP\,[\phi]_{B_0}P={}^tP\,M\,P=\begin{bmatrix}6&0&-4\\0&6&2\\-4&2&6\end{bmatrix}$$

Exo 3

Rappel : Matrice d'un endo $\phi : E \to E$

$B = (e_1, \dots, e_n)$, $B' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E.

$$\underset{B}{E} \xrightarrow{\phi} \underset{B'}{E} \qquad \text{pour } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\phi(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} f_k = \boxed{a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{nj} f_n}$$

$$M_{B,B'}(\phi) = \begin{array}{c|c} & \phi(e_1) \dots \phi(e_j) \dots \\ \hline \begin{matrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}} & \end{bmatrix} \end{array} \in M_n(\mathbb{K})$$

Composée d'applications et multiplication matricielle :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\phi} & E & \xrightarrow{\psi} & E \\ B_1 & & B_2 & & B_3 \end{array}$$

bases

$$M_{B_1,B_3}(\psi \circ \phi) = M_{B_2,B_3}(\psi) \cdot M_{B_1,B_2}(\phi)$$

Lien entre matrice de passage et matrice d'un endo :

P = matrice de passage de B à B' : $f_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} e_k$.

$$P = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} f_j \\ \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} \end{array} = M_{\underbrace{B',B}}(id_E)$$

Attention à l'ordre

1. Changement de base pour $\phi : E \to E$:

$$\begin{array}{lcccc} & E & \xrightarrow{id_E} E & \xrightarrow{\phi} E & \xrightarrow{id_E} E \\ \text{bases} & B' & B & B & B' \end{array}$$

$$M_{B',B'}(\phi) = M_{B',B'}(id_E \circ \phi \circ id_E)$$

$$= \underbrace{M_{B,B'}(id_E)}_{P^{-1}} . \underbrace{M_{B,B}(\phi)}_{M} \underbrace{M_{B',B}(id_E)}_{P}$$

P = matrice de passage de B à B'

Conclusion:

$$\underline{M' = P^{-1} M P}$$

Dans l'énoncé : P est notée C

Pause : reprise à 15 h 10

2. Changement de base pour une forme bilin. $\beta : E \times E \to \mathbb{R}$.

ici $M = [\beta]_B = (\beta(e_i, e_j))$, $M' = [\beta]_{B'} = (\beta(e'_i, e'_j))$

relation entre M et M' ?

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} e_k.$$

$$\beta(f_i, f_j) = \beta\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} p_{lj} e_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ki}\, p_{lj}\, \beta(e_k, e_l)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} ({}^tP)_{ik} \underbrace{\beta(e_k, e_l)}_{M_{kl}} P_{lj}$$

$$M'_{ij} = ({}^tP M P)_{ij}$$

$$M' = {}^tP M P$$

1. et 2. : pour un endo $M' = P^{-1} M P$

pour une forme bilin $M' = {}^tP M P$.

Exo 3. 3) $P \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

P est orthogonale ssi ${}^tPP = I_n$ ssi $P\,{}^tP = I_n$.

${}^tPP = I_n$ s'écrit $({}^tPP)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tP)_{ik} P_{kj} = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} p_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

① $i=j$ $\sum_{k=1}^{n} p_{ki}^2 = 1$ $\Rightarrow \forall k, i,\ |p_{ki}| \leq 1$

(sinon $\sum_k p_{ki}^2 > 1$)

② $i \neq j$ $\sum_{k=1}^{n} p_{ki} p_{kj} = 0$.

notons $\vec{v_i} = \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{pmatrix}$ et $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

$\langle\, ,\, \rangle$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$.

① s'écrit $\langle \vec{v_i}, \vec{v_i} \rangle = 1$ pour tout i

② —"— $\langle \vec{v_i}, \vec{v_j} \rangle = 0$ pour tout $i \neq j$

+ tout $\vec{v_i}$ de norme 1

$\vec{v_i}, \vec{v_j}$ orthogonaux.

rem: $\vec{v_i}$ = la $i^{\text{ème}}$ colonne de P.

On a la même conclusion pour les lignes de P.

Exo 4. Produit scalaire : E = esp. vect. sur $\mathbb{R}$

$\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ forme bil. + 2 conditions :

1) $\forall u, u' \in E, \ \langle u, u' \rangle = \langle u', u \rangle$: symétrique

2) $\forall u \in E, \ \langle u, u \rangle \geq 0$ et $\langle u, u \rangle = 0$ entraine $u = 0$. } définie positive.

1. a) $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\beta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = xx' + xy' + yx' + yy'$

bil. ✓ sym. ✓

✗ Défini positif : $\beta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \geq 0$.

pour $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\beta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (1-1)^2 = 0$! mais $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\to$ <u>pas défini positif</u>

1. b) $\beta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = 2xx' + 3yy' + 2xy' + 2yx'$

bil. ✓ sym. ✓

Défini positif : $\beta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2x^2 + 3y^2 + 2xy + 2yx$

$$= 2x^2 + 4xy + 3y^2 = 2(x^2 + 2xy) + 3y^2$$

$$= 2(x+y)^2 - 2y^2 + 3y^2 = 2(x+y)^2 + y^2 \geq 0.$$

Si pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $2(x+y)^2 + y^2 = 0$, alors

$x+y=0$ et $y=0$. i.e. $x=0=y$

$\rightarrow$ β est définie positive.

1. c) $E=$ l'ensemble des applications continues $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

E est un esp. vect. sur $\mathbb{R}$ pour les lois :

$+ : E\times E\to E \quad (f,g)\mapsto f+g:[a,b]\to\mathbb{R} : t\mapsto (f+g)(t)=f(t)+g(t)$

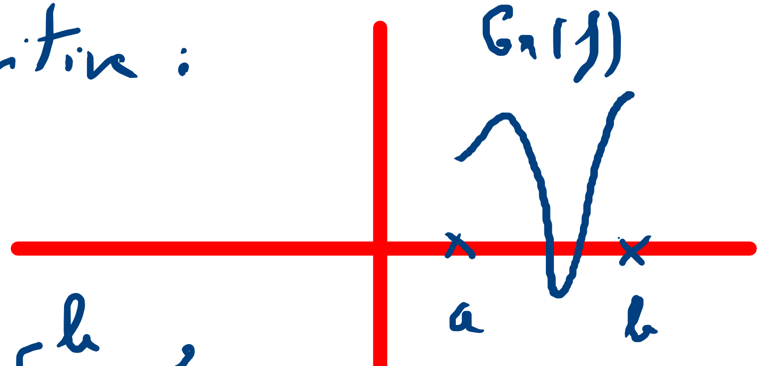
$\cdot : \mathbb{R}\times E\to E \quad (\lambda,f)\mapsto \lambda f:[a,b]\to\mathbb{R} : t\mapsto (\lambda f)(t)=\lambda f(t)$

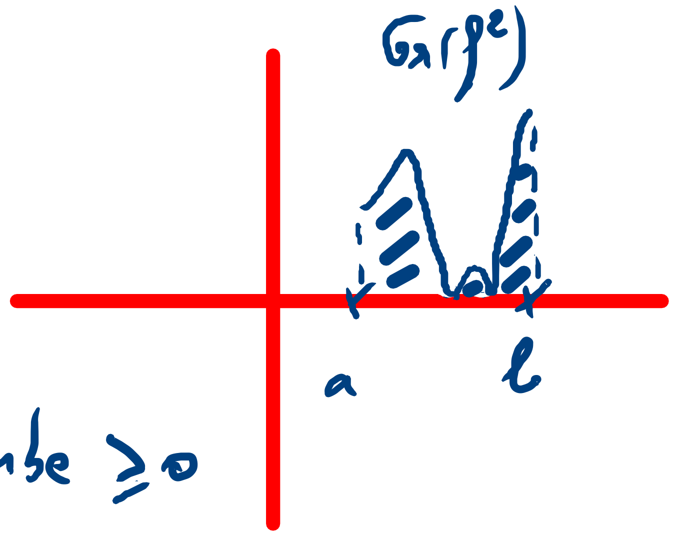
$\beta : E\times E\to\mathbb{R} : (f,g)\to \beta(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)\,dt$

β est bilinéaire car l'intégrale est linéaire. ✓

β est symétrique : $\beta(f,g)=\beta(g,f)$ ✓

Définie positive :



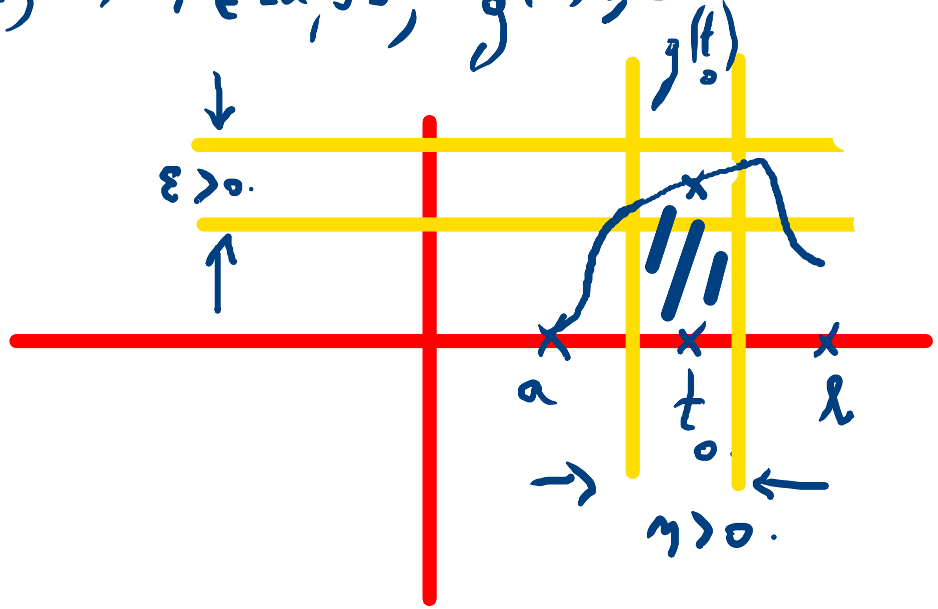


$\beta(f,f)=\int_a^b f(t)^2\,dt =$ aire sous la courbe ≥ 0

Supposons $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^0 t.q.

1) il existe $t_0 \in [a,b]$ avec $g(t_0) \neq 0$.

2) $\forall t \in [a,b]$, $g(t) \geq 0$.



C^0 : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$,

$\forall t$, $|t - t_0| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_0)| < \varepsilon$

$\int_a^b g(t)\,dt \geq$ aire $\boxed{/\!/}$ > 0.

ici : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^0 $\Rightarrow$ $f^2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ C^0
$t \to f(t)^2$

$\int_a^b f(t)^2\,dt = 0 \Rightarrow \forall t$, $f^2(t) = 0$ i.e. $f(t) = 0$.

Conclusion : $\varphi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire.