Université Lyon 1 L2 Mathématiques S. Parmentier Année 2019-2020

Corrigés d'exercices

Fiche 3

Rappel 1: on se donne un espace vectoriel E sur le corps commutatif $\mathbf{K}$.

On appelle *forme linéaire* sur E toute application linéaire $\phi : E \to \mathbf{K}$.

L'ensemble des formes linéaires sur E est noté $E^\star$ et est appelé l'*espace dual* de E. C'est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ pour les lois usuelles

$$E^\star \times E^\star \to E^\star : (\phi, \psi) \mapsto \phi + \psi$$
$$\mathbf{K} \times E^\star \to E^\star : (\lambda, \phi) \mapsto \lambda\phi$$

[Pour tout $x \in E$, $(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x), \quad (\lambda\phi)(x) = \lambda\,\phi(x)$.]

Comme toute application linéaire, une forme $\phi \in E^\star$ est déterminée par l'image d'une base de E: supposons E de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\times$ de base $(e_1, \ldots, e_n)$ et notons $\alpha_i = \phi(e_i), i \in \{1, \ldots, n\}$. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ on a

$$\phi(x) = \phi(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = (\alpha_1\, \alpha_2\, \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.

1. La famille $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et ϕ est définie par ses valeurs sur cette base. Pour obtenir α, β, γ il suffit d'expliciter:

$$\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \alpha + \beta + \gamma = 0$$
$$\phi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 2\alpha + \gamma = 1$$
$$\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \alpha + 2\beta + 3\gamma = 4$$

C'est un système de 3 équations à 3 inconnues dont la solution est

$$\alpha = -1, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 3.$$

2. $\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 0$ s'écrit

$$-x - 2y + 3z = 0. \qquad (E)$$

Le noyau $Ker\,\phi$ est donc le *plan vectoriel* de $\mathbf{R}^3$ d'équation (E).

Remarque: on sait que tout espace vectoriel réel $E \neq \{0\}$ admet une *infinité* de bases. Pour expliciter *une* base de $Ker\,\phi$, on peut par exemple prendre $y = 1, z = 0$ et $y = 0, z = 1$, ce qui donne

$$Ker\,\phi = Vect(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Rappel 2: si l'espace E est de dimension n sur $\mathbf{K}$, alors $E^\star$ est aussi de dimension n sur $\mathbf{K}$.

Pour le voir il suffit d'exhiber une base de $E^\star$ de cardinal n: soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E; on définit n formes linéaires $e_i^\star, i \in \{1, \dots, n\}$ sur E en posant, pour tout i, j,

$$e_i^\star(e_j) = \delta_{ij}.$$

(δ_{ij} est le symbole de Kronecker: $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{jj} = 1$.)
La famille $(e_1^\star, \dots, e_n^\star)$ est alors une base de $E^\star$ appelée la *base duale* de $(e_1, \dots, e_n)$:
Elle est libre: si $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^\star$ alors pour tout j, $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^\star(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$.
Elle est génératrice: si $\phi \in E^\star$ est telle que $\phi(e_j) = \alpha_j$ alors $\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^\star$ (observer que leurs valeurs sur $e_j, j \in \{1, \dots, n\}$ sont égales).

Exercice 2.

1. Par le rappel, il suffit de vérifier que (ϕ_1, ϕ_2) est libre, i.e. que $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 = 0$ entraine $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Or $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 = 0$ ssi $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$ est nulle sur une base de E ssi

$$0 = (\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$0 = (\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 - \lambda_2$$

ce qui donne $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$.

2. Voici comment exprimer une forme linéaire $\phi \in (\mathbf{R}^2)^\star$ dans la base (ϕ_1, ϕ_2): notons $\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \alpha$ et $\phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \beta$.
$\phi = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$ ssi leurs valeurs sur une base sont égales ssi

$$\alpha = \phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = (\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2)(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\beta = \phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2)(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \lambda_1 - \lambda_2$$

ce qui donne

$$\phi = \frac{\alpha + \beta}{2}\phi_1 + \frac{\alpha - \beta}{2}\phi_2.$$

Pour g, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$: $g = \frac{1}{2}\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2$.
Pour h, $\alpha = 2$ et $\beta = -6$: $h = -2\phi_1 + 4\phi_2$.

Exercice 3.

1. La trace est linéaire: pour $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda tr(A) + tr(B).$$

2. On sait déjà (cf l'exercice sur le produit scalaire matriciel) que, pour tout i, j, k, l,

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}.$$

Par hypothèse, $\phi(E_{ij}E_{kl}) = \phi(E_{kl}E_{ij})$, i.e.

$$\delta_{jk}\, \phi(E_{il}) = \delta_{li}\, \phi(E_{kj}).$$

En prenant $j = k$ et $i \neq l$, on obtient $\phi(E_{il}) = 0$ et en prenant $j = k$ et $i = l$, on obtient $\phi(E_{ii}) = \phi(E_{jj})$.
En conclusion, ϕ est nulle sur les matrices non diagonales $E_{il}, i \neq l$, et il existe un réel λ tel que $\phi(E_{ii}) = \lambda$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
La réponse à la question est donc: $\phi(E_{ij}E_{kl}) = 0$ pour tout i, j, k, l avec $i \neq l$ ou $j \neq k$ et il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\phi(E_{ij}E_{ji}) = \lambda$ pour tout i, j.

3. $tr(E_{il}) = 0$ pour tout $i \neq l$ et $tr(E_{ii}) = 1$ pour tout i. Dès lors les formes linéaires $M \mapsto \lambda tr(M)$ et $M \mapsto \phi(M)$ prennent les mêmes valeurs sur une base de $M_n(\mathbf{R})$. Elles sont donc égales.

Rappel 3: si $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ est un espace euclidien, à tout $x \in E$, on peut associer la forme linéaire

$$\phi_x : E \to \mathbf{R} : y \mapsto \langle x, y \rangle.$$

L'application

$$E \to E^\star : x \mapsto \phi_x$$

est alors un isomorphisme, i.e. c'est une bijection linéaire:
linéarité: observer que pour $\lambda \in \mathbf{R}, x, x' \in E$, on a, pour tout $y \in E$,

$$\phi_{\lambda x + x'}(y) = \langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle = \lambda \phi_x(y) + \phi_{x'}(y) = (\lambda \phi_x + \phi_{x'})(y).$$

bijectivité: $x \mapsto \phi_x$ étant linéaire entre espaces de même dimension n, il suffit de montrer qu'elle est injective, i.e. de montrer que son noyau est nul: or $0 = \phi_x$ ssi pour tout $y \in E$, $0 = \phi_x(y) = \langle x, y \rangle$; en particulier $0 = \langle x, x \rangle$ ce qui entraine $x = 0$.

Si $v : E \to E$ est une application linéaire, on définit

$$v^\star : E \to E : x \mapsto v^\star(x)$$

en déclarant que $v^\star(x)$ est l'unique élément de E tel que pour tout $y \in E$, $\phi_{v^\star(x)}(y) = \phi_{v(y)}(x)$, i.e. tel que

$$\forall y \in E, \quad \langle v^\star(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle.$$

$v^\star$ est linéaire et est appelé l' endomorphisme *adjoint* de v. Observer que l'on a $(v^\star)^\star = v$.

Exercice 4.
Pour obtenir $Ker(v^\star) = Im(v)^\perp$, on observe que pour $x \in E$, on a

$$v^\star(x) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, \langle v^\star(x), y\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E, \langle x, v(y)\rangle = 0 \Leftrightarrow x \in Im(v)^\perp.$$

En remplaçant v par $v^\star$, on a aussi

$$Ker(v) = Ker((v^\star)^\star) = Im(v^\star)^\perp$$

et donc

$$Ker(v)^\perp = (Im(v^\star)^\perp)^\perp = Im(v^\star).$$

Pour obtenir l'égalité $rg(v) = rg(v^\star)$, on se sert (i) du fait que pour tout sous-espace $V \subset E$, $E = V \oplus V^\perp$ (donc $\dim E = \dim V + \dim V^\perp$) et (ii) du théorème du rang: pour tout endomorphisme v de E, $\dim Ker(v) + \dim Im(v) = \dim E$. On a

$$rg(v^\star) = \dim Im(v^\star) = \dim Ker(v)^\perp = \dim E - \dim Ker(v) = \dim Im(v) = rg(v).$$

Exercice 5. Par le théorème du rang, il suffit de montrer que les noyaux $Ker(u)$ et $Ker(u^\star \circ u)$ ont même dimension. Il se fait que ces noyaux sont égaux:
L'inclusion $Ker(u) \subset Ker(u^\star \circ u)$ est immédiate: si $u(x) = 0$, alors $u^\star(u(x)) = 0$.
Pour obtenir l'inclusion $Ker(u^\star \circ u) \subset Ker(u)$, observer que si $(u^\star \circ u)(x) = 0$, alors $0 = \langle x, u^\star(u(x))\rangle = \langle u(x), u(x)\rangle$, ce qui entraine $u(x) = 0$.

Exercice 6.
Un endomorphisme $u : E \to E$ est dit *symétrique* ou *autoadjoint* si $u^\star = u$. On sait (cf cours) que tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.
Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres de u: $u(e_i) = \lambda_i e_i, i \in \{1, \ldots, n\}$.
Si pour tout $x \in E, \langle x, u(x)\rangle = 0$, alors $0 = \langle e_i, u(e_i)\rangle = \lambda_i \langle e_i, e_i\rangle$ pour tout i. Comme $\langle e_i, e_i\rangle \neq 0$, on a $\lambda_i = 0$ i.e. $u(e_i) = 0$ pour tout i et u est l'endomorphisme nul.
En clair: un endomorphisme diagonalisable de spectre nul est l'endomorphisme nul.

Rappel 4: soit $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.
1. Un endomorphisme $u : E \to E$ est dit orthogonal s'il conserve le produit scalaire, i.e. si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Observer que cette condition équivaut à $u^\star \circ u = id_E$.
Une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ est dite orthogonale si ${}^tAA = I_n$.

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et u un endomorphisme de E de matrice M_u dans cette base. Alors $M_{u^\star} = {}^tM_u$: pour voir cela, écrivons $M_u = (m_{ij})$ et $M_{u^\star} = (m^\star_{ij})$, autrement dit, écrivons $u(e_j) = \sum_k m_{kj}e_k$ et $u^\star(e_j) = \sum_k m^\star_{kj}e_k$. On a

$$\langle e_i, u^\star(e_j)\rangle = \sum_k m^\star_{kj}\langle e_i, e_k\rangle = \sum_k m^\star_{kj}\delta_{ik} = m^\star_{ij}$$

et

$$\langle e_i, u^\star(e_j)\rangle = \langle u(e_i), e_j\rangle = \sum_k m_{ki}\langle e_k, e_j\rangle = \sum_k m_{ki}\delta_{kj} = m_{ji},$$

i.e. pour tout i, j, $m^\star_{ij} = m_{ji}$.

Exercice 7.

Pour rappel: soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et u et v deux endomorphismes de E de matrices M_u et M_v dans cette base. Alors,

$$u = v \Leftrightarrow \forall j, u(e_j) = v(e_j) \Leftrightarrow M_u = M_v.$$

Supposons maintenant $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormée.
Par le rappel 4, on sait que, dans toute base orthonormée, $M_{u^\star} = {}^tM_u$.
Pour les endomorphismes autoadjoints on a donc

$$u = u^\star \Leftrightarrow M_u = M_{u^\star} \Leftrightarrow M_u = {}^tM_u.$$

Pour rappel: la multiplication matricielle est définie par la règle $M_{v\circ u} = M_v\, M_u$.

Pour les endomorphismes orthogonaux, on a donc

$$u^\star \circ u = id_E \Leftrightarrow M_{u^\star\circ u} = I_n \Leftrightarrow M_{u^\star}M_u = I_n \Leftrightarrow {}^tM_uM_u = I_n.$$

Exercice 8.

1. Je commence par une question (un peu) plus générale: que peut-on dire du spectre d'un endomorphisme $u : E \to E$ d'un espace vectoriel réel E de dimension $2n+1, n \in \mathbf{N}$?

Le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ de u s'écrit $\chi_u(X) = (-1)^{2n+1}X^{2n+1} + \cdots + det(u)$. Dès lors, pour l'application polynomiale

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \chi_u(x)$$

on a

$$lim_{x\to\pm\infty}\chi_u(x) = \mp\infty.$$

Il existe donc un réel $M > 0$ tel que $\chi_u(M) < 0$ et $\chi_u(-M) > 0$. Le théorème de la valeur intermédiaire nous assure alors que l'application continue $\chi_u : [-M, M] \to \mathbf{R}$ prend toute valeur entre $\chi(M)$ et $\chi(-M)$, en particulier, il existe $x_0 \in]-M, M[$ tel que $\chi_u(x_0) = 0$.

Conclusion: tout endomorphisme u d'un espace réel E de dimension impaire admet une valeur propre réelle.

2. Observer que si λ est une valeur propre réelle de l' endomorphisme orthogonal u, alors $\lambda \in \{1, -1\}$: en effet, pour un vecteur propre $x \in E \setminus \{0\}$ de valeur propre λ, on a

$$\langle x, x\rangle = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda^2\langle x, x\rangle,$$

i.e. $\lambda^2 = 1$ car $\langle x, x\rangle \neq 0$.

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de u avec $\lambda_1 \in \{1, -1\}$. Il y a deux cas:

1. les valeurs propres sont réelles. La condition $1 = det(u) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ n'étant pas satisfaite pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, l'une d'elles vaut 1.

L'exemple type est l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$M_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit du demi-tour d'axe e_1: u fixe e_1 (l'axe du demi-tour) et pour $x \in \langle e_1\rangle^\perp = \langle e_2, e_3\rangle$, $u(x) = -x$ (le demi-tour).

2. l'une des valeurs propres , disons λ_2, n'est pas réelle. Le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ étant à coefficients réels, on a aussi $\chi_u(\overline{\lambda_2}) = 0$, i.e. $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$. La condition $1 = det(u) = \lambda_1 \mid \lambda_2 \mid^2$ montre que $\lambda_1 > 0$, i.e. $\lambda_1 = 1$.

L'exemple type est l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & -sin\,\theta \\ 0 & sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}, \ \theta \notin \pi\mathbf{Z}.$$

Il s'agit de la rotation d'axe e_1 et d'angle θ dont les valeurs propres sont $1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}$.

3. (a) Gram-Schmidt assure l'existence d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) complétant e_1.

(b) Par hypothèse $u(e_1) = e_1$ et par construction $Vect(e_1)^\perp = Vect(e_2, e_3)$.
Observer que si $\langle x, e_1\rangle = 0$, alors $\langle u(x), e_1\rangle = \langle u(x), u(e_1)\rangle = \langle x, e_1\rangle = 0$, i.e.

$$u(Vect(e_1)^\perp) \subset Vect(e_1)^\perp.$$

La matrice de M_u de u dans cette base est donc diagonale par blocs

$$M_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

On peut être plus complet: la restriction

$$u_| : Vect(e_1)^\perp \to Vect(e_1)^\perp : x \mapsto u(x)$$

est un endomorphisme orthogonal en dimension 2 de déterminant 1. Nous verrons (exercice 10) que dans ce cas il existe un réel θ tel que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.

1.

(a) On sait que la matrice M_u de u dans toute base orthonormée est orthogonale: ${}^tM_uM_u = I_n$. On a $1 = det(I_n) = det({}^tM_uM_u) = det({}^tM_u)det(M_u) = (det(M_u))^2$ et donc $det(u) = det(M_u) \in \{1, -1\}$.

(b) On a montré (exercice 8) qu'une valeur propre réelle λ de u vaut 1 ou -1.

2. Pour rappel, la projection orthogonale p_V sur un sous-espace $V \subset E$ est l'application linéaire

$$p_V : E = V \oplus V^\perp \to E : v + v_\perp \mapsto v,$$

où $v \in V, v_\perp \in V^\perp$.
On a $Ker\, p_V = V^\perp$.
Comme tout endomorphisme orthogonal u est bijectif (d'inverse $u^\star$), si p_V est orthogonal alors $Ker\, p_V = V^\perp = \{0\}$. Dans ce cas $V = E$ et $p_V = id_E$ est bien orthogonal.

Conclusion: $p_E = id_E$ est orthogonal, mais un projecteur orthogonal sur un sous-espace strict $V \subset_{\neq} E$ n'est jamais un endomorphisme orthogonal.

3. Pour rappel, la symétrie orthogonale de sous-espace V est l'application linéaire

$$s_V : E = V \oplus V^\perp \to E : v + v_\perp \mapsto v - v_\perp.$$

Pour $x = v + v_\perp, y = w + w_\perp \in E$, on a

$$\langle s_V(x), s_V(y)\rangle = \langle v - v_\perp, w - w_\perp\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v_\perp, w_\perp\rangle = \langle v + v_\perp, w + w_\perp\rangle = \langle x, y\rangle,$$

ce qui montre qu'une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal.

Remarque: on appelle *symétrie* tout endomorphisme $s : E \to E$ tel que $s^2 = s \circ s = id_E$. Etant annulée par le polynôme $X^2 - 1$, une telle symétrie est diagonalisable et ses valeurs propres sont égales à 1 ou -1. En posant $E_\pm = Ker(s \mp id_E)$, on a donc $E = E_+ \oplus E_-$ et

$$s : E = E_+ \oplus E_- \to E : x_+ + x_- \mapsto x_+ - x_-,$$

où $x_\pm \in E_\pm$.
On vérifie alors que s est un endomorphisme orthogonal ssi $E_- = E_+^\perp$, i.e. ssi s est une symétrie orthogonale.