Corrigés d'exercices (suite)

Fiche 3

Exercice 10.

Notons $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx'+yy'$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^2$.

1. La condition $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbf{R})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^t AA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix},$$

i.e.

$$a^2+c^2=1, \quad ab+cd=0, \quad b^2+d^2=1$$

ce qui s'écrit aussi

$$\langle (a,c),(a,c)\rangle = 1, \quad \langle (a,c),(b,d)\rangle = 0, \quad \langle (b,d),(b,d)\rangle = 1,$$

i.e.

$$((a,c),(b,d)) \text{ est une base orthonormée du plan .}$$

L'*observation principale* de l'exercice est la suivante: pour (a,c) de norme 1, la droite $(a,c)^\perp$ a exactement 2 vecteurs directeurs normés: $(-c,a)$ et $(c,-a)$. Dès lors $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$.

Venons-en aux questions:

(a) (a,c) est de norme 1, i.e. (a,c) appartient au cercle unité de $\mathbf{R}^2$. Par définition même de *cos* et *sin* (faites une figure), il existe un réel θ tel que $a = cos(\theta)$, $c = sin(\theta)$.

(b) $(b,d)^\perp$ est une droite vectorielle du plan. Comme $\langle (a,c),(b,d)\rangle = 0$, on sait que

$$(b,d)^\perp = Vect((a,c)).$$

Enfin, $(d,-b)$ est élément de cette droite car $\langle (d,-b),(b,d)\rangle = 0$, i.e. il existe un réel λ tel que $(d,-b) = \lambda(a,c)$.

(c) Par le (b), $(d,-b) = \lambda(a,c)$. Ces vecteurs étant de norme 1, $\lambda = \pm 1$. Si $\lambda = 1$, $A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = R_\theta$ et si $\lambda = -1$, $A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix} = S_\theta$.

2. Par la question 1, on sait que $O_2(\mathbf{R}) \subset \{R_\theta, \theta \in \mathbf{R}\} \cup \{S_\theta, \theta \in \mathbf{R}\}$. Pour l'inclusion réciproque, il suffit d'observer que pour tout réel θ, ${}^tR_\theta R_\theta = I_2$ et ${}^tS_\theta S_\theta = I_2$, i.e. $R_\theta, S_\theta \in O_2(\mathbf{R})$.

Remarque: on sait déjà que le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à ± 1. On a donc pour tout entier $n \geq 1$, $O_n(\mathbf{R}) = O_n^+ \cup O_n^-$, où $O_n^{\pm} = \{A \in O_n(\mathbf{R}), det(A) = \pm 1\}$. Il se fait que pour $n = 2$,

$$O_2^+ = \{R_\theta, \theta \in \mathbf{R}\}, \quad O_2^- = \{S_\theta, \theta \in \mathbf{R}\}.$$

3. Pour rappel, on dit que deux matrices A et B commutent si $AB = BA$.
On utilise la formule d'Euler $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$:

$$(cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta')) + i(cos(\theta)sin(\theta') + sin(\theta)cos(\theta')) = cos(\theta+\theta') + isin(\theta+\theta').$$

On a

$$\begin{aligned} R_\theta R_{\theta'} &= \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\theta') & -sin(\theta') \\ sin(\theta') & cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta') & -cos(\theta)sin(\theta') - sin(\theta)cos(\theta') \\ sin(\theta)cos(\theta') + cos(\theta)sin(\theta') & -sin(\theta)sin(\theta') + cos(\theta)cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cos(\theta+\theta') & -sin(\theta+\theta')) \\ sin(\theta+\theta') & cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\ &= R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'+\theta} = R_{\theta'}R_\theta. \end{aligned}$$

Certains éléments de $O_2(\mathbf{R})$ ne commutent pas: par exemple, pour $S_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$R_\theta S_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} -sin(\theta) & cos(\theta) \\ cos(\theta) & sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad S_{\frac{\pi}{2}} R_\theta = \begin{pmatrix} sin(\theta) & cos(\theta) \\ cos(\theta) & -sin(\theta) \end{pmatrix};$$

pour $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$, $R_\theta S_{\frac{\pi}{2}} \neq S_{\frac{\pi}{2}} R_\theta$.

4.
(a) Il est utile ici de faire une figure: fixez une base orthonormée (e_1, e_2) et tracez un cercle de rayon 1.
- r_θ est l'unique endomorphisme tel que

$$r_\theta(e_1) = cos(\theta)e_1 + sin(\theta)e_2, \quad r_\theta(e_2) = -sin(\theta)e_1 + cos(\theta)e_2.$$

Observez sur la figure que la nouvelle base $(r_\theta(e_1), r_\theta(e_2))$ s'obtient en faisant pivoter la base (e_1, e_2) d'un angle θ (avec $\theta > 0$ dans le sens anti-horloger), i.e. r_θ est la *rotation plane* d'angle θ.
- s_θ est l'unique endomorphisme tel que

$$s_\theta(e_1) = cos(\theta)e_1 + sin(\theta)e_2, \quad s_\theta(e_2) = sin(\theta)e_1 - cos(\theta)e_2.$$

On peut en faire une première description géométrique en observant que s_θ est la composée

$$s_\theta = r_\theta \circ s$$

où s est la réflexion de droite fixe $Vect(e_1)$:

$$s(e_1) = e_1, \quad s(e_2) = -e_2.$$

On peut faire mieux: $S_\theta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, i.e. c'est la matrice d'une symétrie orthogonale. Etant annulée par le polynôme simple $X^2 - 1$, S_θ est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \{1, -1\}$. Comme $\lambda_1 \lambda_2 = det(S_\theta) = -1$, ses valeurs propres sont 1 et -1. s_θ est donc une *réflexion plane.* Reste à trouver la droite fixe, i.e. un vecteur propre de s_θ de valeur propre 1.

Il y a 2 cas immédiats: si $\theta = 2n\pi$, $S_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. Si $\theta = (2n+1)\pi$, $S_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

Pour le cas général, on peut chercher $x_0 e_1 + y_0 e_2$ tel que $S_\theta \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ mais on peut aussi (c'est plus direct) observer ceci: pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$S_\theta(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + S_\theta^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

i.e. s'il n'est pas nul, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + S_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est vecteur propre de S_θ de valeur propre 1.

Pour $\theta \notin \pi\mathbf{Z}$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + cos(\theta) \\ sin(\theta) \end{pmatrix} = 2cos(\frac{\theta}{2}) \begin{pmatrix} cos(\frac{\theta}{2}) \\ sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix},$$

i.e. s_θ est la réflexion plane de droite fixe $Vect(cos(\frac{\theta}{2})e_1 + sin(\frac{\theta}{2})e_2)$.

(b) On a $det(s_\theta \circ s_\varphi) = det(s_\theta)det(s_\varphi) = 1$. Par la remarque de la question 2, $s_\theta \circ s_\varphi$ est une rotation.

Si r_ψ est une rotation, alors pour toute réflexion s_θ, $det(s_\theta \circ r_\psi) = -1$; c'est donc une réflexion, i.e il existe φ tel que $s_\theta \circ r_\psi = s_\varphi$, d'où (car $s_\theta^2 = id$)

$$r_\psi = s_\theta \circ s_\varphi.$$

Toute rotation plane est donc la composée de 2 réflexions planes.

Rappel: soit $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 et $f \in O(E)$ un endomorphisme orthogonal de E. Par les exercices 8 et 9 , on sait que f admet une valeur propre réelle $\lambda \in \{1, -1\}$.

Il y a deux cas: $det(f) = 1$ (exercice 8) et $det(f) = -1$ (analogue à l'exercice 8).

Si $det(f) = 1$, 1 est valeur propre de f.

Soit $e_1 \in E$ de norme 1 tel que $f(e_1) = e_1$. Alors pour toute base orthonormée (e_1, e_2, e_3) complétant e_1, $e_1^\perp = Vect(e_2, e_3)$ et $f(e_1^\perp) = e_1^\perp$. La restriction $f_| : e_1^\perp \to e_1^\perp$ est un endomorphisme orthogonal de déterminant 1, c'est donc une rotation plane. La matrice R de f dans la base (e_1, e_2, e_3) s'écrit

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix},$$

pour un réel θ. On dit que $f : E \to E$ est une *rotation d'axe* $\Delta = Vect(e_1)$ et d'angle θ. Observer que l'angle est tel que $tr(f) = tr(R) = 1 + 2cos(\theta)$.

Si $det(f) = -1$, -1 est valeur propre de f. Si $e_1 \in E$, de norme 1, est vecteur propre de f de valeur propre -1, alors dans toute base orthonormée (e_1, e_2, e_3) complétant e_1, la matrice S de f s'écrit

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

pour un réel θ. f est donc la composée d'une réflexion de plan fixe $e_1^\perp$ et d'une rotation d'axe $\Delta = Vect(e_1)$. Observer qu'ici $tr(f) = tr(S) = -1 + 2cos(\theta)$.

Dans les deux cas, les éléments caractéristiques de f sont $Vect(e_1)$ et θ.

Exercice 11.

$$A = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

C'est un calcul: ${}^tAA = I_3$, i.e. $A \in O_3(\mathbf{R})$ et $det(A) = 1$. A est donc la matrice d'une rotation d'axe Δ porté par tout vecteur (normé) $e_1 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ tel que $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. La résolution de ce système donne (au signe près) $e_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

L'angle θ satisfait à $1 + 2cos(\theta) = tr(A) = -\frac{7}{9}$, i.e. $cos(\theta) = -\frac{8}{9}$.

Exercice 12.

1. La matrice A est orthogonale ssi $I_3 = {}^t AA = A^2 = \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix}$, i.e. ssi $1 = a^2 + 2b^2$ et $0 = b(2a+b)$.
Si $b = 0$, alors $a = \pm 1$ et $A = \pm I_3$.
Si $b = -2a$, alors $a = \pm\frac{1}{3}$ et $A = \pm\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pour $A = \pm I_3, f = \pm id_E$.
Pour $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $det(A) = -1$. f est donc la composée d'une réflexion et d'une rotation d'axe.
Voici les éléments caractéristiques:
Pour l'axe: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est tel que $Ae_1 = -e_1$.
Pour l'angle: $-1 + 2cos(\theta) = tr(A) = 1$, i.e. $cos(\theta) = 1$ et $\theta \equiv 0$ modulo 2π.

Dans la base orthonormée

$$(e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix})$$

la matrice S de f s'écrit

$$S = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

i.e. f est la réflexion de plan fixe $Vect(e_2, e_3)$.

Pour $A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\-2 & 1 & -2\\-2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, il suffit de changer les signes: $det(A) = (-1)^3(-1) = 1$ et dans la même base (e_1, e_2, e_3), la matrice R de f s'écrit

$$R = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

i.e. f est le demi-tour d'axe porté par $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 13.

L'endomorphisme u est auto-adjoint car $A = \begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\0 & 3 & 1\\-3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.

On sait (cf cours) que tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien est diagonalisable dans une base orthonormée B. La matrice P de passage de la base canonique à B est alors une matrice orthogonale ($P^{-1} = {}^tP$). On a donc

$$A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$$

avec D la matrice diagonale des valeurs propres de u.
Pour diagonaliser, on suit les étapes habituelles:
1) polynôme caractéristique $\chi_A(X) = det(A - XI_3)$
2) racines λ de $\chi_A(X)$= valeurs propres de A
3) sous-espaces propres E_λ de A de valeur propre λ = solutions de l'équation $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Voici ce que j'obtiens:
1) $\chi_A(X) = (3 - X)(X^2 - 3X - 10)$
2) $\chi_A(X) = (3 - X)(X + 2)(X - 5)$, i.e. les valeurs propres sont $3, -2, 5$.
3)

$$E_3 = Vect(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}),\ E_{-2} = Vect(\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}),\ E_5 = Vect(\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}).$$

Ces sous-espaces sont (comme il se doit) deux à deux orthogonaux. En choisissant une base orthonormée B de vecteurs propres de A (i.e. en normant les 3 vecteurs ci-dessus), la matrice de passage P de la base canonique à B est orthogonale et

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} {}^tP.$$

Exercice 14.

Je vous laisse cet exercice calculatoire.

Exercice 15.

On suppose $(E, \langle\,,\,\rangle)$ euclidien de dimension $n \geq 2$.
On fixe $a \in E$ de norme 1 et un réel k, et on s'intéresse à l'endomorphisme

$$f : E \to E : x \mapsto x + k\langle x, a\rangle a.$$

1. On doit vérifier $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\begin{aligned} \langle f(x), y\rangle &= \langle x + k\langle x, a\rangle a, y\rangle \\ &= \langle x, y\rangle + k\langle x, a\rangle\langle a, y\rangle \\ &= \langle x, y + k\langle a, y\rangle a\rangle \\ &= \langle x, f(y)\rangle. \end{aligned}$$

2. Notons E_λ le sous-espace propre de valeur propre λ.
Si $k = 0$, $f(x) = x$ pour tout $x \in E$, i.e. $E = E_1$.
Supposons $k \neq 0$. On observe que pour $x \in E$, $f(x) = x$ ssi $\langle x, a\rangle = 0$, i.e. $E_1 = a^\perp$ (de dimension $n - 1$).
Comme on sait que deux sous-espaces propres (d'un endomorphisme autoadjoint) pour des valeurs propres distinctes sont orthogonaux, l'autre sous-espace propre de f doit être $Vect(a)$:

$$f(a) = a + k\langle a, a\rangle a = a + ka = (1 + k)a,$$

i.e. $Vect(a) = E_{1+k}$.

Exercice 16.

On fixe $A \in M_n(\mathbf{R})$ et on considère l'endomorphisme

$$\Phi : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R}) : M \mapsto {}^tAMA + AM\,{}^tA.$$

Pour vérifier $\langle \Phi(M), N\rangle = \langle M, \Phi(N)\rangle$, on se sert de $tr(BC) = tr(CB)$ et ${}^t(BC) ={}^t C\,{}^tB$.
On a

$$\begin{aligned} \langle \Phi(M), N\rangle &= tr({}^t\Phi(M)N) \\ &= tr({}^t({}^tAMA + AM\,{}^tA)N) \\ &= tr(({}^tA\,{}^tMA + A\,{}^tM\,{}^tA)N) \\ &= tr({}^tA\,{}^tMAN) + tr(A\,{}^tM\,{}^tAN) \\ &= tr({}^tMAN\,{}^tA) + tr({}^tM\,{}^tANA) \\ &= tr({}^tM\Phi(N)) \\ &= \langle M, \Phi(N)\rangle. \end{aligned}$$

Comme tout endomorphisme auto-adjoint, Φ est diagonalisable.