Fiche 3

Exercice 1. Une forme linéaire

On considère un élément ϕ dans $(\mathbb{R}^3)^*$, l'espace dual de $\mathbb{R}^3$ (= l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$). On dit que ϕ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, car $\phi \in (\mathbb{R}^3)^*$ est caracterisé par les coefficients α, β, γ de son action sur un vecteur quelconque :

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Soient

$$\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0, \quad \phi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1, \quad \phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 4.$$

1. Déterminer α, β, γ pour décrire la forme linéaire ϕ.
2. Trouver le sous-espace annulé par ϕ, autrement dit le noyau de la forme linéaire $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Exercice 2. Une base de $(\mathbb{R}^2)^*$

Soient ϕ_1, ϕ_2 les deux éléments de $(\mathbb{R}^2)^*$ définis par $\phi_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x + y$ et $\phi_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x - y$. Montrer que (ϕ_1, ϕ_2) forment une base de $(\mathbb{R}^2)^*$. Exprimer les formes linéaires suivantes dans la base (ϕ_1, ϕ_2) :

$$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x, \quad h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x - 6y.$$

Exercice 3. Formes linéaires multiplicatives sur les matrices

Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\phi(AB) = \phi(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Vérifier que la trace d'une matrice $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est bien un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.
2. Choisir les matrices E_{ij} (avec 1 en ligne i et colonne j et 0 ailleurs) pour une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et voir l'action de ϕ sur le produit de deux elements de la base : $\phi(E_{ij}E_{kl})$. Dans quel cas $\phi(E_{ij}E_{kl})$ n'est pas nul ?
3. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(M) = \lambda\ \mathrm{tr}(M)$.

Exercice 4. Endomorphisme adjoint

Soit v un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. On définie $v^* \in \mathbf{End}(E)$ par $\langle v^*(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$ pour $\forall x, y \in E$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(\ v^*) = (\mathrm{Im}\ v)^{\perp} \ \text{ et } \mathrm{Im}(\ v^*) = (\mathrm{Ker}\ v)^{\perp}.$$

En déduire $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(v^*)$.

Exercice 5.

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^* \circ u)$.

Exercice 6. Endomorphisme symétrique

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E vérifiant, pour tout $x \in E$, $< u(x), x >= 0$. Quelles sont les valeurs propres possibles de u ? En déduire l'expression pour u.

On rappelle qu'un endomorphisme symétrique est diagonalisable.

Exercice 7. Rappels du cours

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Démontrer les équivalences suivantes :

u est orthogonal $\iff$ pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est orthogonale
$\iff$ il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est orthogonale.

et

$$\begin{aligned} u \text{ est autoadjoint} \quad &\iff \quad \text{pour toute base orthonormée } \mathcal{B} \text{ de } E\text{, la matrice de } u \text{ dans } \mathcal{B} \text{ est symétrique} \\ &\iff \quad \text{il existe une base orthonormée } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ dans laquelle la matrice de } u \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

Exercice 8.

On se place dans un espace euclidien E de dimension 3. Soit u un endomorphisme orthogonal de E tel que $\det(u) = 1$.

1. Montrer que u admet au moins une valeur propre (nécessairement réelle).
2. Montrer que 1 est une valeur propre de u. Est-ce forcément la seule ?
3. Soit e_1 un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1 de norme 1.
   (a) Justifier l'existence d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E prolongeant e_1.
   (b) Quelle forme a la matrice de u dans cette base ?

Exercice 9.

Soit E un espace euclidien.

1. On suppose que $u \in \mathbf{End}(E)$ est un endomorphisme orthogonal.
   (a) Quelle peut être la valeur du déterminant de u ?
   (b) Quelles sont les valeurs propres (nécessairement réelles) de u ?
2. Quelles sont les projections orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?
3. Quelles sont les symétries orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?

Tourner la page SVP

Exercice 10. Groupe orthogonale en dimension 2

On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille 2×2. Le but de l'exercice est de les expliciter.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.
   (b) Montrer que le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire au vecteur (a, c).
   (c) Montrer que A est nécessairement d'une des deux formes suivantes :
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
2. En déduire que $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que R_θ et $R_{\theta'}$ commutent. Les élements de $O_2(\mathbb{R})$ commutent-ils entre eux ?
4. On se place dans un plan euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement les endomorphismes r_θ et s_θ ayant pour matrices respectives R_θ et S_θ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer que le produit de deux réflexions s_θ et s_φ est une rotation. Obtient-on ainsi toutes les rotations ?

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthornormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Déterminer la nature, et préciser les éléments caractéristiques, de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est donnée par $A = -\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.

Soient a et b deux réels. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$ a-t-on A orthogonale ?
2. Dans ce cas, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

Exercice 13.

On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que u est autoadjoint. Justifier l'existence, puis expliciter une matrice P orthogonale pour laquelle $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 14.

On considère la matrice symétrique $B = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer B^2 et en déduire que B est orthogonale.
Justifier l'existence puis déterminer une matrice Q orthogonale pour laquelle $Q^{-1}BQ$ est diagonale.

Exercice 15.

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel.

1. Montrer que $f(x) = x + k\langle x, a\rangle a$ définit un endomorphisme symétrique de E.
2. Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par
$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN).$$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = {}^tAMA + AM{}^tA.$$
Montrer que Φ est un endomorphisme autoadjoint. Φ est-il diagonalisable ?