# Corrigé fiche 2

**Rappel :** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $A$ une partie de $E$. L'orthogonal de $A$ est l'ensemble, noté $A^\perp$, consitué de vecteurs de $E$ ortogonaux à tous les vecteurs de $A$ : $A^\perp = \{x \in E | \ \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}$.

**Rappel (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) :** Considérons un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ (de dimension $n$) muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ n'est pas orthogonale, ce procédé va renvoyer une famille orthonormée qui est toujours une base de $E$. On a le résultat suivant :

**Théorème :** Il existe une unique base orthonormale $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de $E$ telle que :
- pour tout $1 \leq p \leq n$, on a $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$,
- pour tout $1 \leq p \leq n$, on a $\langle e_p, u_p \rangle \geq 0$.

Comment construire la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ ? Étape par étape :
- on construit $u_1$ en normant le vecteur $e_1$ : on prend $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.
- on va construire $u_2$ comme une combinaison linéaire de $e_2$ et de $u_1$ : on le cherche sous la forme $e_2 + \lambda u_1$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour que $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$, on doit avoir $\lambda = -\frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{\|e_1\|^2} = -\langle u_1, e_2 \rangle$. Ensuite, on norme le vecteur obtenu pour avoir $u_2$.
- Supposons qu'on a construit les vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ pour un certain $k < n$. On va de même chercher $u_{k+1}$ sous la forme d'une combinaison linéaire

$$e_{k+1} + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k$$

Pour avoir l'orthogonalité avec chacun des $u_1, \ldots, u_k$, il faut et il suffit que

$$\lambda_i = -\frac{\langle e_i, e_{k+1} \rangle}{\|e_i\|^2} = -\langle u_i, e_{k+1} \rangle.$$

Il suffit ensuite de renormaliser le vecteur obtenu pour trouver $u_{k+1}$.

Une manière plus succinte d'écrire ce procédé (si on aime les formules) est de considérer la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ définie par

$$v_k = e_k - \frac{\langle e_1, e_k \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \cdots - \frac{\langle e_{k-1}, e_k \rangle}{\|e_{k-1}\|^2} e_{k-1} \tag{1}$$

et la base obtenue est donné en renormalisant les $(v_k)$, c'est-à-dire $u_k := \frac{v_k}{\|v_k\|}$.

**Exercice 1. (Gram-Schmidt, exemples).**

1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel donné par $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + yy' + zz'$.
   (a) Considérons le plan $(2, -3, 6)^\perp$. Par définition, il contient tous les vecteurs $(x, y, z)$ de $R^3$ tels que $\langle (x, y, z), (2, -3, 6) \rangle = 0$, autrement dit c'est le sous-espace vectoriel donné par

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ 2x - 3y + 6z = 0\}.$$

Commençons par trouver une base de $E$. Si $(x, y, z) \in E$, alors on a $x = \frac{3}{2}y + 3z$, d'où

$$(x, y, z) = (\frac{3}{2}y + 3z, y, z) = y(\frac{3}{2}, 1, 0) + z(3, 0, 1)$$

donc les vecteurs $u := (3, 2, 0)$ et $v := (3, 0, 1)$ forment une famille génératrice de $E$ et également une famille libre puisqu'ils sont non-colinéaires.
On vérifie qu'on a alors

$$\langle u, v\rangle = 3 \times 3 + 2 \times 0 + 0 \times 1 \neq 0$$

donc la base $(u, v)$ n'est pas orthogonale. On va donc lui appliquer le procédé de Gram-Schmidt.
Normons $u$ : on a $\|u\|^2 = 3^2 + 2^2 + 0^2 = 13$ donc le premier vecteur est donné par $u' := \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2, 0)$.
On cherche le deuxième vecteur sous la forme $v' := v + \frac{\lambda}{\sqrt{13}}(3, 2, 0)$ : pour avoir l'orthogonalité, on doit avoir

$$\langle u', v'\rangle = 0 \Rightarrow \langle u', v\rangle + \lambda\langle u', u'\rangle = 0 \Rightarrow \lambda = -\langle u', v\rangle = -\frac{3}{\sqrt{13}}\times 3 - \frac{2}{\sqrt{13}}\times 0 - 0\times 1 = -\frac{9}{\sqrt{13}}$$

donc on obtient le vecteur $(3, 0, 1) - \frac{9}{13}(3, 2, 0) = \left(\frac{12}{13}, -\frac{18}{13}, 1\right)$ qu'il faut normer. La norme de ce vecteur vaut :

$$\frac{12^2}{13^2} + \frac{18^2}{13^2} + 1 = \frac{49}{13} = (\frac{7}{\sqrt{13}})^2$$

D'où le vecteur $v'$ est donné par $\left(\frac{12}{7\sqrt{13}}, -\frac{18}{7\sqrt{13}}, \frac{\sqrt{13}}{7}\right)$ et on a donc obtenu la base $(u', v')$ orthonormée. On peut bien vérifier que

$$\langle u', v'\rangle = \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{12}{7\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}} \times (-\frac{18}{7\sqrt{13}}) + 0 \times \frac{\sqrt{13}}{7} = \frac{36}{7 \times 13} - \frac{36}{7 \times 13} = 0.$$

(b) *Soient* $u_1 = (1, 2, 2)$*,* $u_2 = (1, 0, 1)$*,* $u_3 = (1, 1, 0)$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*.*
Puisqu'on a 3 vecteurs, il faut et il suffit de montrer qu'ils forment une famille libre. Pour ce faire, on peut par exemple regarder le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

qui vaut 3, donc est différent de 0 et la famille est bien libre.

(c) *Trouver une base orthonormée* $(e_1, e_2, e_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que* $e_1$ *soit colinéaire à* $u_1$*, et que le plan engendré par* $e_1$ *et* $e_2$ *soit égal à celui engendré par* $u_1$*,* $u_2$*.*
On va orthonormaliser la base $(u_1, u_2, u_3)$ en utilisant le procédé de Gram-Schmidt. En effet, le théorème ci-dessus nous garantit alors que si $(e_1, e_2, e_3)$ est la base obtenue, alors $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, ce qui est demandé par l'énoncé.
Commençons par déterminer $e_1$ : il suffit de normer $e_1$. On a $\|u_1\|^2 = 1 + 2^2 + 2^2 = 9 = 3^2$ donc le vecteur $e_1$ est donné par

$$e_1 := \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

On va maintenant chercher $e_2$ sous la forme $u_2 + \lambda e_1$. Pour que l'on ait $\langle e_2, e_1\rangle = 0$, on doit prendre $\lambda = -\langle u_2, e_1\rangle$, c'est-à-dire $\lambda = -\frac{1}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \times 0 - \frac{2}{3} \times 1 = -1$. Il faut donc considérer $e_2' = u_2 - e_1 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$ et on remarque que ce vecteur est déjà normé, donc $e_2 := e_2'$ convient. On va maintenant chercher $e_3$ sous la forme $v_3 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. De même, pour que $e_3$ soit orthogonal à $e_1$, on doit prendre $\lambda_1 = -\langle u_3, e_1\rangle = -1$ et pour que $e_3$ soit orthogonal à $e_2$, on doit prendre $\lambda_2 = -\langle u_3, e_2\rangle = 0$. Considérons donc $e_3' = v_3 - e_1 = \frac{1}{3}(2,1,-2)$ et ce vecteur est également normé donc $e_3 := e_3'$ convient. On a donc finalement obtenu la base

$$\{\frac{1}{3}(1,2,2), \frac{1}{3}(2,-2,1), \frac{1}{3}(2,1,-2)\}$$

et on peut de même vérifier qu'elle est bien orthogonale.

2. Soit $E$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq 3$. On considère le produit scalaire défini par

$$b(P,Q) = \int_{-2}^{2} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

(a) cf la Fiche 1, Exercice 4 question 1c), c'est exactement le même principe.

(b) On va orthonormer la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ en utilisant Gram-Schmidt. Ici, on va devoir faire pleins de calculs de la forme $b(X^i, X^j)$ tout au long du procédé. On peut être plus efficace en les calculant en amont dans la matrice de la forme bilinéaire $\beta$. Si on a $0 \leq i, j \leq 3$, on a

$$b(X^i, X^j) = \int_{-2}^{2} t^{i+j}dt = \frac{1}{i+j+1}\left[t^{i+j+1}\right]_{-2}^{2} = \begin{cases} \frac{1}{i+j+1}2^{i+j+2} & \text{si } i+j \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } i+j \text{ est impair} \end{cases}$$

Donc la matrice de la forme bilinéaire $b$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & \frac{2^4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2^4}{3} & 0 & \frac{2^6}{5} \\ \frac{2^4}{3} & 0 & \frac{2^6}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2^6}{5} & 0 & \frac{2^8}{7} \end{pmatrix}$$

Commençons par normer le vecteur 1 : on a

$$b(1,1) = \int_{-2}^{2} 1\mathrm{d}t = 4, \text{ donc } e_1 := \frac{1}{2} \text{ convient.}$$

Cherchons ensuite le deuxième vecteur sous la forme $X + \lambda\frac{1}{2}$, de même pour que $X$ soit orthogonal à $e_1$, on doit prendre $\lambda = -b(X, e_1) = -\frac{1}{2}b(X,1) = 0$. (on regarde la valeur de la matrice en 2ème ligne et 1ère colonne puisque $X = X^1$ et $1 = X^0$) Donc on a juste à normer le vecteur $X$, or

$$b(X,X) = \frac{16}{3}$$

donc le vecteur $e_2 := \frac{\sqrt{3}}{4}X$ convient. On va ensuite chercher $e_3$ sous la forme $X^2 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. Pour que $e_3$ soit orthogonal à $e_1$, on doit avoir

$$\lambda_1 = -b(X^2, e_1) = -\frac{1}{2}b(X^2, 1) = -\frac{8}{3}$$

Pour que $e_3$ soit orthogonal à $e_2$, on doit avoir

$$\lambda_2 = -b(X^2, e_2) = -\frac{\sqrt{3}}{4}b(X^2, X) = 0.$$

Donc pour obtenir $e_3$ on va normer le vecteur $X^2 - \frac{4}{3}$. Or

$$b(X^2 - \frac{4}{3}, X^2 - \frac{4}{3}) = b(X^2, X^2) - 2b(X^2, \frac{4}{3}) + b(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{2^6}{5} - 2 \times \frac{4}{3} \times \frac{2^4}{3} + \frac{16}{9} \times 4$$

Pour chercher le dernier vecteur, il faudrait le chercher sous la forme $X^3 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$, et on obtient alors

$$\lambda_1 = -b(X^3, e_1) = -\frac{1}{2}b(X^3, e_1) = 0, \lambda_2 = -b(X^3, e_2) = -\frac{\sqrt{3}}{4}b(X^3, X) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2^6}{5} = -\frac{16\sqrt{3}}{5}$$

et de même $\lambda_3 = 0$. Donc il reste à renormaliser le vecteur $X^3 - \frac{16\sqrt{3}}{5}X$.

**Exercice 2. (Calcul d'orthogonaux)**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on définit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \langle X, Y \rangle = {}^tXAY$.

1. Si ${}^tX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ et ${}^tY = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$, alors

$$\langle X, Y \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

Cette forme est bien bilinéaire, et symétrique (par exemple puisque $A$ est la matrice de cette forme, et c'est une matrice symétrique). On a de plus

$$\langle X, X \rangle = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_3^3 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 3x_3^2$$

Cette somme est positive et, en tant que somme de trois carrés, est nulle si et seulement si chacun des trois éléments sous les carrés valent 0, donc si et seulement si $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ et donc $x_1 = 0$. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive et c'est un produit scalaire.

2. Déterminons une base de $F^\perp$. Un vecteur ${}^tX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ est dans $F^\perp$ si et seulement si il est orthogonal aux deux vecteurs définissant $F$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in F^\perp &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle = 0 \\ \langle \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x_3 = 0, x_2 = -x_1 \end{aligned}$$

Donc $F^\perp = \mathrm{Vect}(1, -1, 0)$. Déterminons une base de $X^\perp$ : on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in F^\perp &\Leftrightarrow \langle \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \end{aligned}$$

Donc on en déduit que $x_1 = -2x_2$, et $x_3$ peut être choisi quelconque : ainsi, $X^\perp = \mathrm{Vect}((-2, 1, 0), (0, 0, 1))$.

**Exercice 3.**

On considère le vecteur $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $P_1$ de la projection orthogonale sur **a** et la matrice $P_2$ de la projection orthogonale sur un vecteur perpendiculaire à **a**.

   **Méthode 1 :** Soit $p$ l'endormorphisme de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a)$, on utilise la formule
$$p(x) = \frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a.$$
   Alors $p(e_1) = p((1,0)) = \frac{2}{5}a = \frac{4}{5}e_1 - \frac{2}{5}e_2$ et $p(e_2) = p((0,1)) = -\frac{1}{5}a = -\frac{2}{5}e_1 + \frac{1}{5}e_2$. Donc la matrice est donnée par
$$P_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
   **Méthode 2 :** Sans utiliser la formule de projection. On va commencer par chercher un vecteur orthogonal à $a$. On a $\langle (x_1, x_2), (2,-1)\rangle = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = x_2$, donc par exemple on peut prendre $(1,2)$. Maintenant, on a $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(a) \oplus \mathrm{Vect}(a)^\perp = \mathrm{Vect}(2,-1) \oplus \mathrm{Vect}(1,2)$. On peut ainsi essayer de décomposer tout vecteur $xe_1 + ye_2$ sous la forme $\lambda(2,-1) + \mu(1,2)$. En posant le système, on obtient alors
$$\lambda = \frac{2x}{5} - \frac{y}{5}, \quad \mu = \frac{x}{5} + \frac{2y}{5}$$
   et donc si $p$ projette sur $\mathrm{Vect}(a)$, on obtient $p(x,y) = \left(\frac{2x}{5} - \frac{y}{5}\right) a$, et on obtient ainsi une expression pour $p$. En calculant $p(e_1)$ et $p(e_2)$, on obtient alors la même matrice que ci-dessus. Par un même procédé, on obtient que si $p'$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a)^\perp$, alors $p'(x,y) = \left(\frac{x}{5} + \frac{2y}{5}\right)(1,2)$. Donc $p'(e_1) = p'(1,0) = \frac{1}{5}e_1 + \frac{2}{5}e_2$ et $p'(e_2) = p'(0,1) = \frac{2}{5}e_1 + \frac{4}{5}e_2$. D'où
$$P_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
2. On obtient $P_1 + P_2 = I_2$. Ceci est normal puisque $P_1 + P_2$ est la matrice associée à l'endomorphisme $p + p'$. Or, cet endomorphisme est l'identité. En effet, on sait que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(a) \oplus \mathrm{Vect}(a)^\perp$ et si $x = x_1 + x_2$ dans cette décomposition, alors $p(x) = x_1$ et $p'(x) = x_2$, donc $(p + p')(x) = p(x) + p'(x) = x_1 + x_2 = x$.

   On obtient $P_1P_2 = 0$. Ceci est également normal puisque $P_1P_2$ est la matrice associée à l'endomorphisme $p \circ p'$, qui est l'endomorphisme nul. En effet, si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Vect}(a)$ et $x_2 \in \mathrm{Vect}(a)^\perp$, alors $p \circ p'(x) = p(x_2) = 0$ car $p$ projette sur $\mathrm{Vect}(a)$ et $x_2 \in \mathrm{Vect}(a)^\perp$.

**Exercice 4.** Soit $a$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On pose $P = \frac{a \cdot {}^t a}{{}^t a \cdot a}$. Montrer que $P^2 = P$ et que la trace de $P$ est égale à 1. Notons tout d'abord qu'on identifie $\mathbb{R}^n$ à l'espace des matrices à $n$ lignes et 1 colonne, pour que ${}^t a \cdot a$ soit un scalaire. On a alors, si $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, ${}^t a \cdot a = \sum_{i=1}^n a_i^2$. Fixons le vecteur $a$ dans la suite, et notons cette quantité $A$. On a alors
$$P^2 = \frac{1}{A^2}(a \cdot {}^t a) \cdot (a \cdot {}^t a) = \frac{1}{A^2} a \cdot ({}^t a \cdot a) \cdot {}^t a = \frac{1}{A} a \cdot {}^t a = P.$$
De plus, on a que $a \cdot {}^t a$ est une matrice carrée de taille $n$ donnée par
$$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_2a_1 & \dots & a_na_1 \\ a_1a_2 & a_2^2 & \dots & a_na_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Tr}(P) = \frac{1}{A}\mathrm{Tr}(a \cdot {}^t a) = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$.

**Exercice 5. Sur les projecteurs.** Soit $p : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie $n$.

1. *Montrons que* $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. Pour ceci, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0\}$ puisque le théorème du rang garantit alors que $\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Ker}(p) = E$ par égalité des dimensions. Une manière classique pour ceci est de montrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - p)$.

   En effet, procédons par double inclusion. Si $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$, et alors $(\mathrm{id} - p)(y) = y - p(y) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$ puisque $p \circ p = p$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - p)$, alors $x - p(x) = 0$, donc $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$.

   Maintenant, supposons que $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - p) \cap \mathrm{Ker}(p)$. Alors $x \in \mathrm{Ker}(p) \Rightarrow p(x) = 0$, et $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id} - p) \Rightarrow p(x) = x$ donc $x = 0$ en combinant ces deux égalités.
2. Soit $E = F \oplus G$ et $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$, c'est à dire $p(f + g) = f$ avec $f \in F$, $g \in G$. Tout d'abord, vérifions bien que $p$ est une application linéaire : si $\lambda \in X$ et $x, y \in E$ avec $x = f_1 + g_1$ et $y = f_2 + g_2$, alors

   $$p(\lambda x + y) = p(\lambda f_1 + f_2 + (\lambda g_1 + g_2)) = \lambda f_1 + f_2 = \lambda p(x) + p(y)$$

   puisque $\lambda f_1 + f_2 \in F$ et $\lambda g_1 + g_2 \in G$. Montrons maintenant que $p \circ p = p$. Soit $x \in E$, il existe un unique couple $(x_f, x_g) \in F \times G$ tel que $x = x_f + x_g$. On a alors $p(x) = p(x_f + x_g) = x_f$, et $p(p(x)) = p(x_f) = x_f$ puisque $x_f \in F$. Donc $p \circ p = p$.
3. Supposons $E$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Montrons que $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement si* $\forall (x, y) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$, $\langle x, y \rangle = 0$.

   $\Rightarrow$ : Supposons que $p$ est un projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p)$, parallèlement à $\mathrm{Im}(p)^{\perp}$. Nous venons de montrer que $p$ est un projecteur, donc on sait que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p)$ et par conséquent on en déduit que $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$. Donc si $y \in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$ et $x \in \mathrm{Im}(p)$, on a nécéssairement $\langle x, y \rangle = 0$.

   $\Leftarrow$ : Réciproquement, supposons que $p$ est un projecteur et que pour tout $(x, y) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$, $\langle x, y \rangle = 0$. Ceci implique que $\mathrm{Ker}(p) \subseteq \mathrm{Im}(p)^{\perp}$ par définition, puisque $\mathrm{Im}(p)^{\perp} = \{x \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } y \in \mathrm{Im}(p)\rangle\}$.
   On sait de plus que $\dim(\mathrm{Ker}(p)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathrm{Im}(p)^{\perp})$, d'où $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$ et $p$ est un projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

**Exercice 6.**

Soit $p$ la projection orthogonale sur la droite $D$ passant par $O = (0, 0, 0)$ et parallèle au vecteur $v = (1, 1, 1)$. Déterminons $p(b)$ où $b = (2, 4, 4)$.

On sait que $p(b)$ est un vecteur colinéaire à $v$, et le scalaire est déterminé par la formule de projection orthogonale :

$$p(b) = \frac{\langle v, \overrightarrow{Ob} \rangle}{\|v\|^2} v$$

Ce vecteur est bien proportionnel à $D$, et si on a un vecteur $u$ orthogonal à $u$ on a bien $p(u) = 0$. On trouve ainsi

$$p(b) = \frac{1 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times 4}{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{10}{3}.$$

Par définition, la distance d'un point à une droite est donnée par la distance entre ce point et son projeté orthogonal sur cette droite (puisque le projeté est le point qui réalise la plus petite distance). On a alors

$$d(b, D) = \|b - p(b)\| = \| \left( \frac{-4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \| = \frac{1}{3}\sqrt{16 + 4 + 4} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

**Exercice 7.** Soit $v$ le vecteur ${}^t(1, 1, ..., 1)$ de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Notons la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$. Les axes sont les droites passant par le point $(0, \ldots, 0)$ et de vecteurs directeurs respectifs les $e_1, \ldots, e_n$. Soit $1 \leq i \leq n$ : pour connaître l'angle $\alpha_i$ entre $v$ et l'axe parallèle au vecteur $e_i$, on va se servir de la caractérisation du produit scalaire donnée par

$$\langle u, v\rangle = \|u\| \times \|v\| \times \cos(\alpha)$$

où $\alpha$ est l'angle entre les vecteurs $u$ et $v$. Ici, pour $u = e_i$, on a $\langle e_i, v\rangle = \langle(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1)\rangle = 1$ et $\|e_1\| = 1$, $\|v\| = \sqrt{1 + \cdots + 1} = \sqrt{n}$. On en déduit que $1 = \sqrt{n} \times \cos(\alpha_i)$ et donc

$$\alpha_i = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ce qui est bien défini puisque *arccos* : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ est la bijection réciproque de la restriction de cos à $[0, \pi]$ (voir la vidéo de l'exercice en question pour plus d'explications), que $\alpha_i$ peut être choisi dans $[0, \pi]$ en prenant la mesure principale de l'angle et que $1/\sqrt{n} \leq 1$ pour $n \geq 1$.

Déterminons la matrice $P$ de la projection orthogonale sur la droite engendrée par $v$. De même, on utilise la formule

$$p(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v$$

et donc on obtient que pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$p(e_i) = \frac{1}{n} v = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que

$$P = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 8.**

Soit $v_1 = {}^t(1, 0, 1)$ et $v_2 = {}^t(2, 1, 0)$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, qui est de dimension 2 puisque $v_1$ et $v_2$ sont non colinéaires.

1. *Calculer la matrice de $p_F$, projecteur orthogonal sur $F$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

   Pour pouvoir appliquer les formules usuelles de projection orthogonales, on voudrait obtenir une base de $F$ qui est elle-même orthogonale. Or on a $\langle v_1, v_2\rangle = 2 + 0 + 0 = 2$, donc on va orthogonaliser la base $(v_1, v_2)$ de $F$ par Gram-Schmidt. Pas besoin d'orthonormaliser ici puisque dans tous les cas on divisera par les normes des vecteurs obtenus dans la formule du projeté orthogonal. Donc on peut garder $v_1$, et on va chercher un vecteur $u_2$ orthogonal à $v_1$ sous la forme $v_2 + \lambda v_1$. Pour que ce vecteur soit orthogonal à $v_1$, il faut alors prendre

   $$\lambda = -\frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} = -\frac{2}{2} = -1$$

   et donc le vecteur $u_2 = v_2 - v_1 = (1, 1, -1)$ convient : $(v_1, u_2)$ est bien une base orthogonale de $F$. La projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v_1, u_2)$ est alors donnée par

   $$p(u) = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

   donc $p(e_1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{3}u_2 = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$, $p(e_2) = 0 \times v_1 + \frac{1}{3}u_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $p(e_3) = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{3}u_2 = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$. La matrice est bien symétrique, ce qui est nécessaire pour avoir une matrice associée à un projecteur orthogonal.

2. *Trouver une base $B$ pour laquelle la matrice de $p_F$ soit la matrice diagonale $Diag(1,1,0)$.*

   Notons par anticipation $(f_1, f_2, f_3)$ la base recherchée, on veut alors que $p(f_1) = f_1$ et $p(f_2) = f_2$, et $p(f_3) = 0$. Puisque $p$ est un projecteur orthogonal sur $F$ (donc parallèlement à $F^\perp$), pour les deux premières conditions il faut et il suffit que $(f_1, f_2)$ soient des éléments de $F$, et même forment une base (puisque on veut une base à la fin). Pour la dernière condition, on va prendre $f_3$ dans $F^\perp$ donc il nous faut trouver une base de $F^\perp$ qui est bien de dimension 1.

   Soit $(x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F^\perp &\Leftrightarrow \langle (x,y,z),(1,0,1)\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle (x,y,z),(1,1-1)\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow x+z=0 \quad \text{et} \quad x+y-z=0\\ &\Leftrightarrow x=-z \quad \text{et} \quad y=2z\end{aligned}$$

   (en prenant comme base de $F$ la base $(v_1, u_2)$), et donc $F^\perp$ est engendré par le vecteur $(-1, 2, 1)$.

   **Autre méthode :** Ici, on y est allé à la main par résolution du système afin de trouver un vecteur $f_3$ qui soit orthogonal à la fois à $f_1 = v_1$ et $f_2 = u_2$. Si on veut être plus rapide pour ceci, on peut utiliser le **produit vectoriel** : voir la vidéo Youtube (à partir de 9min25) pour plus de détails sur cette technique. Cela s'utilise pour trouver dans $\mathbb{R}^3$ un vecteur orthogonal à deux vecteurs qui forment une famille libre.

3. *Déterminer toutes les bases de $R^3$ pour lesquelles la matrice de $p_F$ soit la matrice diagonale $Diag(1,1,0)$.*

   En fait, nous venons de voir que pour trouver une telle base, il suffit de compléter une base $(f_1, f_2)$ de $F$ par un vecteur qui engendre $F^\perp$, c'est à dire un vecteur colinéaire à $(-1, 2, 1)$.

**Exercice 9.**

*Déterminer la matrice de la projection ortogonale de $\mathbb{R}^3$ sur l'intersection des plans d'équation $x + y + z = 0$ et $x - z = 0$.*

Nous allons tout d'abord déterminer une base de l'intersection des plans (notés $P_1$ et $P_2$) d'équations cartésiennes respectives $x + y + z = 0$ et $x - z = 0$. Pour ceci, nous n'avons pas besoin d'obtenir par avance des bases de $P_1$ et de $P_2$, on va raisonner directement sur $P_1 \cap P_2$. Notons que ceci donne un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ qui satisfait deux équations non redondantes : on s'attend donc à obtenir un espace de dimension 1, autrement dit une droite. On a

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in P_1 \cap P_2 &\Leftrightarrow x+y+z=0 \text{ et } x-z=0\\ &\Leftrightarrow x=z, y=-2z\end{aligned}$$

donc $P_1 \cap P_2$ est engendré par le vecteur $v := (1, -2, 1)$. On va donc déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(1, -2, 1)$, par la méthode usuelle. On a

$$p(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} u.$$

Donc $p(e_1) = \frac{1}{6}u, p(e_2) = \frac{-2}{6}u, p(e_3) = \frac{1}{6}u$, ce qui donne la matrice suivante

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

**Exercice 10.** *Déterminer la solution $\hat{x}$ des moindres carrés des équations $3x = 10$ et $4x = 5$. Vérifier que l'erreur commise est un vecteur orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.*

Ici, on a pas de solution puisque le vecteur $(10,5)$ n'est pas colinéaire au vecteur $(3,4)$. Par la méthode des moindres carrés, la distance va être minimisée en considérant la solution $\hat{x}$ du système $3\hat{x} = y_1$ et $4\hat{x} = y_2$, où le vecteur $(y_1, y_2)$ est la projection orthogonale de $(10,5)$ sur la droite engendrée par $v = (3,4)$. Si on note $p$ la projection orthogonale sur cette droite, on a alors

$$p((10,5)) = \frac{\langle (10,5),(3,4)\rangle}{\|(3,4)\|^2}(3,4) = \frac{50}{25}(3,4) = (6,8).$$

Donc on trouve $\hat{x} = 2$ (c'est la solution de $3\hat{x} = 6$ et $4\hat{x} = 8$, et l'erreur est donnée par

$$\|(10,5) - (6,8) = \|(4,-3)\| = 5,$$

le vecteur d'erreur est donné par $(4,-3)$ et est bien orthogonal au vecteur $(3,4)$.

**Exercice 11. Moindres carrés en dim 3** Déterminer la solution $\hat{x}$ des moindres carrés d'équation $\mathbf{A}x = b$, en déterminant $p = \mathbf{A}\hat{x}$ pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que le vecteur d'erreur $b - p$ est orthogonal aux vecteurs colonnes de $A$.

On remarque que $b \notin \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1)$ puisque $\lambda(1,0,1) + \mu(0,1,1) = (\lambda, \mu, \lambda+\mu)$ ne peut être égal au vecteur $(1,1,1)$. On va donc considérer $\hat{x}$ comme étant la solution du système $\mathbf{A}\hat{x} = p$, où $p$ est le projeté orthogonal du vecteur $b$ sur le plan $F$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1,0,1)$ et $v_2 = (0,1,1)$. Les deux vecteurs générateurs de $F$ ne sont pas orthogonaux puisque $\langle (1,0,1),(0,1,1)\rangle = 1$. On va donc orthogonaliser cette famille : prenons $u_1 = v_1$. On va chercher $u_2$ sous la forme $v_2 + \lambda v_1$ : pour que $u_2$ soit orthogonal à $v_1$, on doit avoir $\lambda = -\frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|^2} = -\frac{1}{2}$, et donc

$$u_2 = v_2 - \frac{1}{2}v_1 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right).$$

Soit $p$ la matrice de projection orthogonale sur $F$. Alors on a

$$p(u) = \frac{\langle u, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \frac{\langle u, u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2.$$

Donc

$$p(b) = \frac{2}{2}u_1 + \frac{2}{3}u_2 = u_1 + \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Donc le vecteur d'erreur est donné par

$$b - p(b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

et on vérifie qu'il est orthogonal à $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$.

**Exercice 12.**

Soit $V$ le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $a_1 = {}^t(1,1,0,1)$ et $a_2 = {}^t(0,0,1,0)$.

1. Déterminons une base de $V^\perp$, qui doit être de dimension 2. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a
$$(x,y,z,t) \in V^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+t=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-t \\ z=0 \end{cases}$$
donc $(x,y,z,t)$ est de la forme $(-y-t,y,0,t) = y(-1,1,0,0)+t(-1,0,0,1)$ et donc $V^\perp$ est engendré par les deux vecteurs $(-1,1,0,0)$ et $(-1,0,0,1)$, qui en forment une base par argument de dimension du supplémentaire orthogonal.
2. Déterminons la matrice $P$ de la projection orthogonale sur $V$. Les vecteurs $a_1$ et $a_2$ forment une base orthogonale de $V$. Ainsi, on peut calculer les éléments $p(e_i)$ pour les vecteurs $e_1,e_2,e_3,e_4$ de la base canonique avec la formule
$$p(u) = \frac{\langle u,a_1\rangle}{\|a_1\|^2}a_1 + \frac{\langle u,a_2\rangle}{\|a_2\|^2}a_2$$
pour obtenir la matrice. Autre méthode : dans la base $(a_1,a_2,a_3,a_4)$ où $(a_3,a_4)$ est la base de $V^\perp$ obtenue dans la question précédente, la matrice de la projection $p$ est donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$
De plus, la matrice de passage de la base canonique à la base $(a_1,a_2,a_3,a_4)$ est donnée par
$$M = \begin{pmatrix} 1&0&-1&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1 \end{pmatrix}$$
On en déduit que la matrice de $P$ dans la base canonique est donnée par
$$MAM^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&-1&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&3&0\\1&1&0&1 \end{pmatrix}$$
Vérifions par exemple la première colonne : $p(e_1) = \frac{1}{3}a_1 = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)$ ainsi que la troisième colonne : $p(e_3) = p(a_2) = a_2$.
3. Par définition, le vecteur de $V$ le plus proche du vecteur $b = {}^t(0,1,0,-1)$ est donné par l'image par la projection orthogonale sur $V$ de $b$, et on calcule
$$p(b) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&3&0\\1&1&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix},$$
ce qui n'est pas étonnant puisqu'on vérifie que $b \in V^\perp$. Réciproquement, le vecteur de $V^\perp$ le plus proche de $b$ est donc lui-même.

**Exercice 13.**

*Dans* $\mathbb{R}^6$ *soit* $H = \{(x_1, \cdots, x_6) \in \mathbb{R}^6 |\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = 0\}$. *Déterminer une base orthonormée de* $H^\perp$ *puis la distance entre* $u = {}^t(1, -1, 0, 2, 4, 0)$ *et* $H$.

Notons que $H$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^6$ déterminé par une unique équation : c'est donc un hyperplan de $\mathbb{R}^6$ et il est de dimension 5. Par conséquent, $H^\perp$ doit être de dimension 1, donc il suffit d'en trouver un vecteur et de le renormer. Déterminons d'abord une base de $H$ : on a $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in H \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6$. Donc$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ est de la forme

$$\begin{aligned}(2x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) =& x_2(2, 1, 0, 0, 0, 0) + x_3(-3, 0, 1, 0, 0, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1, 0, 0)\\ &+ x_5(3, 0, 0, 0, 1, 0) + x_6(1, 0, 0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

donc les 5 vecteurs ci-dessus forment une base de $H$, et un vecteur $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ est orthogonal à ces 5 vecteurs si et seulement si

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_6 = 0 \end{cases}$$

autrement dit $x_2 = -2x_1$, $x_3 = 3x_1$, $x_4 = x_1$, $x_5 = -3x_1$ et $x_6 = -x_1$. Donc $H^\perp$ est engendré par le vecteur $(1, -2, 3, 1, -3, -1)$, qui est de norme $\sqrt{1 + 4 + 9 + 1 + 9 + 1} = 5$, et donc

$$v := \frac{1}{5}(1, -2, 3, 1, -3, -1)$$

est une base orthonormée de $H^\perp$.

On en déduit que la distance de $u$ à l'hyperplan $H$ est donnée par

$$|\langle u, v\rangle| = |\langle(1, -1, 0, 2, 4, 0), \frac{1}{5}(1, -2, 3, 1, -3, -1)\rangle| = |\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + 0 + \frac{2}{5} - \frac{12}{5} + 0| = \frac{7}{5}.$$

**Exercice 14. (La géométrie des polynômes)**

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ des polynômes de degré au plus 3, à coefficients réels. On munit $E$ du produit scalaire suivant :

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3\rangle \ = \ a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \ .$$

On définit $H = \{P \in E : P(1) = 0\}$.

1. On vérifie que $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$ : $H$ est non vide car le 0 de l'espace vectoriel $E$ est le polynôme constant égal à 0, et il est bien dans $H$ puisque évalué en 1 on obtient bien 0. Soient $P, Q \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0$ puisque $P$ et $Q$ sont dans $H$.
2. *Déterminons une base orthonormée de* $H$. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, alors $P \in H \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$. On peut remarquer que si on identifie un polynôme $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ de $E$ avec le quadruplet $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbb{R}^4$, alors le produit scalaire défini ci-dessus est le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^4$, et donc on pourrait travailler dans $\mathbb{R}^4$ en cherchant la projection orthogonal sur le sous-espace $F = \{(a_0, a_1, a_2, a_3) \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$. De même, un vecteur de $F$ s'écrira sous la forme $(-a_1 - a_2 - a_3, a_1, a_2, a_3)$

donc une base de $F$ est donnée par $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$, $(-1,0,0,1)$ : autrement dit les polynômes $X-1$, $X^2-1$ et $X^3-1$.
Cette base n'est pas orthogonale : par exemple $\langle X-1, X^2-1\rangle = 1$. On va donc l'orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt. Contrairement à précédemment, on va d'abord l'orthogonaliser, et on renormera tous les vecteurs par la suite. Considérons $v_1 := (-1,1,0,0)$, $v_2 := (-1,0,1,0)$ et $v_3 := (-1,0,0,1)$. Gardons $v_1' := v_1$ et cherchons $v_2'$ sous la forme $v_2 + \lambda v_1'$. Pour que $v_2'$ soit orthogonal à $v_1$, on doit avoir $\lambda = -\frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} = -\frac{1}{2}$. Donc prenons

$$v_2' = (-1,0,1,0) - \frac{1}{2}(-1,1,0,0) = \frac{1}{2}\,(-1,-1,2,0)\,.$$

Cherchons maintenant $v_3'$ sous la forme $v_3 + \lambda v_1' + \mu v_2'$ : pour que $v_3'$ soit orthogonal à $v_1'$, on doit avoir

$$\lambda = -\frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} = -\frac{1}{2}$$

et de même pour que $v_3'$ soit orthogonal à $v_2'$, on doit avoir

$$\mu = -\frac{\langle v_3, v_2'\rangle}{\|v_2'\|^2} = -\frac{1}{3}.$$

Donc prenons

$$\begin{aligned} v_3' = v_3 - \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{3}v_2' &= (-1,0,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0,0) - \frac{1}{6}(-1,-1,2,0) \\ &= \frac{1}{2}(-1,-1,0,2) - \frac{1}{6}(-1,-1,2,0) \\ &= \frac{1}{3}(-1,-1,-1,3) \end{aligned}$$

Il reste à normaliser la base orthogonale obtenue :

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0), \quad u_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,-1,-1,3).$$

3. *Déduire du point précédent la projection orthogonale de $X$ sur $H$. Compléter la base que vous avez déterminée dans le point précédent à une base de $E$ de votre choix, et écrire la matrice de la projection orthogonale sur $H$ dans cette base.*
On a déterminé une base orthonormée de l'espace $H$, on peut donc utiliser la formule de projection orthogonale pour déterminer $p(X)$, en identifiant $X$ au quadruplet $(0,1,0,0)$. On a

$$\begin{aligned} p(X) &= \langle (0,1,0,0), u_1\rangle u_1 + \langle (0,1,0,0), u_2\rangle u_2 + \langle (0,1,0,0), u_3\rangle u_3 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}u_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}}u_3 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(X-1) - \frac{1}{6}(2X^2-X-1) - \frac{1}{12}(3X^3-X^2-X-1) \end{aligned}$$

Pour compléter cette base en une base de $E$, on va déterminer une base de $H^\perp$ en déterminant un polynôme orthogonal à la fois à $v_1', v_2'$ et $v_3'$. Pour éviter les fractions, on peut en fait calculer un polynôme orthogonal à $v_1' \leftrightarrow X-1, 2v_2' \leftrightarrow 2X^2-X-1, 3v_3' \leftrightarrow 3X^3-X^2-X-1$. On a $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ est orthogonal à ces 3 polynômes si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 - a_0 = 0 \\ 2a_2 - a_1 - a_0 = 0 \\ 3a_3 - a_2 - a_1 - a_0 \end{cases}$$

d'où l'on en déduit que $a_0 = a_1 = a_2 = a_3$, et donc $H^\perp$ est engendré par $1 + X + X^2 + X^3$.

4. *Déterminer la distance d'un polynôme de $E$ à $H$ en fonction de ses coefficients.* On a trouvé une base de $H^\perp$ : pour en obtenir une base orthonormée il suffit de renormer le vecteur obtenu. Considérons donc le vecteur $P = \frac{1}{2}(1 + X + X^2 + X^3)$. On sait alors que la distance d'un polynôme $E = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ à $H$ (qui est un hyperplan de $E$, puisque $F$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$) est donnée par
$$\|E - p(E)\| = \langle P, E\rangle = \langle \frac{1}{2}(1 + X + X^2 + X^3), a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\rangle = \frac{1}{2}(a_0 + a_1 + a_2 + a_3).$$

**Exercice 15.**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \cdots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour $P, Q \in E$, on pose
$$< P, Q >= \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1. On vérifie bien que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire. Elle est de plus symétrique car
$$\sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i) = \sum_{i=0}^{n} Q(a_i)P(a_i).$$
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors
$$\langle P, P\rangle = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)^2$$
donc cette quantité est positive, et est nulle si et seulement si $P(a_i) = 0$ pour tout $i$, ce qui implique que $P$ admet tous les $a_i$ pour racines, et admet donc $n+1$ racines réelles distinctes. Comme $P$ est de degré au plus $n$, cela implique que $P$ est le polynôme nul. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire. Vérifier qu'avec cette application, $E$ est muni d'un produit scalaire.
2. Pour déterminer une base orthonormée de $E$, remarquons qu'utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est très fastidieux. En effet, en renormant le premier vecteur on obtient $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et ensuite on pourrait voir que le deuxième vecteur s'expimerait sous la forme $X - \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n+1}$. Il faut ensuite continuer pour tous les $X^j$, et on obtient des formules pas très jolies.
On va donc essayer de réfléchir autrement. On veut une famille de polynômes $P_1, \dots, P_n$ tels que $\sum_{i=0}^{n} P_j(a_i)P_k(a_i) = 0$ pour tout $1 \le k, j \le n$. Pour ce faire, on peut par exemple imaginer que le polynôme $P_j$ admette tous les $a_i$ pour $i \neq j$ comme racines, c(est-à-dire $P_j(a_i) = 0$ pour $i \neq j$. On a alors dans ce cas que la somme ci-dessus est bien 0, car le seul terme non nul pour $P_j$ est donné pour $i = j$, mais on a alors $P_k(a_j) = 0$. Si en plus on rajoute la condition que $P_j(a_j) = 1$, on obtient alors que $\langle P_j, P_j\rangle = 1$, et donc on aurait bien une famille orthonormée.
Cherchons donc des polynômes $P_j$ tels que $P_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$ et $P_j(a_j) = 1$. **En fait, ce sont des polynômes bien connus, appelés** polynômes de Lagrange
Fixons $1 \le j \le n$, et cherchons $P_j$ : il doit avoir $a_0, a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dot{;} a_n$ comme racine donc doit être divisible par $(X - a_k)$ pour $k \in \{0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$. Comme $P_j$ doit aussi être de degré $\le n$, on a alors toutes les racines, et il suffit de diviser par le scalaire apropríé pour avoir $P_j(a_j) = 1$ : on obtient
$$P_j(X) = \prod_{i \neq j} \frac{X - a_i}{a_j - a_i}$$

et cette famille est bien orthonormale. Reste à vérifier que c'est une base. On a $(n+1)$-vecteurs dans un espace de dimension $n+1$, donc il suffit de montrer que c'est une famille libre : soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = 0.$$

Alors en évaluant en $a_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$, on obtient $\lambda_i = 0$ par définition, et donc la famille est bien libre.

3. *Pour $Q \in E$ quelconque, déterminer la distance de $Q$ à $H = \{P \in E | \sum_{i=1}^n P(a_i) = 0\}$.*
Notons que $H$ est un sous-espace déterminé par une équation : ce sera donc un hyperplan de $R_n[X]$. Pour trouver la distance d'un polynôme $Q$ à $H$, nous allons donc trouver un vecteur $R$ normal/orthogonal à $H$. Or, de par la définition de $H$, on remarque que si $P \in H$, alors

$$\langle P, 1 \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \text{ par définition de } H,$$

et donc le polynôme constant égal à 1 est bien orthogonal à $H$. On en déduit alors que

$$d(Q, H) = \frac{|\langle Q, 1 \rangle|}{\|1\|} = \frac{\left| \sum\limits_{k=0}^{n} Q(a_k) \right|}{\sqrt{n+1}}.$$

**Exercice 16. (La géométrie des matrices)**

On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant : $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi(A, B) = tr(A\, {}^tB)$

1. Voir la Question 2 de l'Exercice 5, Fiche 1. C'est similaire en prenant la transposée.

**Remarque :** Pour vérifier facilement les calculs et l'orthogonalité dans la suite, ainsi que par anticipation de l'Exercice 17, on peut calculer que si $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} \\ n_{2,1} & n_{2,2} \end{pmatrix}$, alors

$$\phi(M, N) = m_{1,1}n_{1,1} + m_{1,2}n_{1,2} + m_{2,1}n_{2,1} + m_{2,2}n_{2,2}. \tag{2}$$

2. *Déterminons une base orthonormée pour le sous-espace $S$ des matrices symétriques.*
Faisons le pour $n$ entier naturel quelconque, ce qui ne rajoute pas de difficulté par rapport au cas $n = 2$. Dans une matrice symétrique, on a de la liberté sur les coefficients diagonaux, et ensuite on doit être invariant par transposée, ce qui impose que si on fait une réflexion par rapport à la diagonale, on doit avoir les mêmes coefficients de part et d'autres. Ainsi, une base de $\mathcal{S}$ est donnée par les matrices $E_{i,i}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $E_{i,j} + E_{j,i}$ pour $1 \leq i < j \leq n$. De plus, pour $1 \leq i \leq n$ et $j \neq i$, on a

$$\phi(E_{i,i}, E_{i,i}) = tr(E_{i,i}^2) = tr(E_{i,i}) = 1, \quad \phi(E_{i,i}, E_{j,k} + E_{k,j}) = \phi(E_{i,i}, E_{j,k}) + \phi(E_{i,i}, E_{k,j}) = 0$$

puisque $j \neq k$ et $\phi(E_{i,i}, E_{j,k})$ est non nul si et seulement si $i = j = k$ ($tr(E_{i,i}E_{k,j}) = \delta_{i,k}\mathrm{tr}(E_{i,j}) = \delta_{i=j=k}$). On a également

$$\phi(E_{i,j} + E_{j,i}, E_{i,j} + E_{j,i}) = \phi(E_{i,j}, E_{i,j}) + 2\phi(E_{i,j}, E_{j,i}) + \phi(E_{j,i}E_{j,i}) = 2.$$

Donc la base $\{E_{i,i} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{i,j} + E_{j,i}) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{S}$.

3. Rappelons qu'on a vu en Fiche 1 qu'on avait une décomposition en somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ antisymétriques. De plus, on vérifie alors que $\mathcal{A}$ est bien le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{S}$ (ce qu'on sait déjà en fait par unicité du supplémentaire) : si $B \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$, alors on a ${}^tB = B$ et ${}^tA = -A$ et donc

$$tr(A^tB) = tr(AB) = tr({}^t(A^tB)) = tr(B^tA) = tr({}^tAB) = tr(-AB) = -tr(AB)$$

d'où $\langle A, B\rangle = 0$. Et $\mathcal{A} = \mathcal{S}^\perp$. On rappelle alors que la décomposition d'une matrice $A$ dans $\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$ est donnée par avec décomposition donnée par

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2} \quad \text{(cf Fiche 1.)}$$

(d) D'après ce que nous venons de montrer, la projection orthogonale sur $\mathcal{S}$ parallèlement à $\mathcal{S}^\perp = \mathcal{A}$ est donnée par

$$p(A) = \frac{A + {}^tA}{2}.$$

Donc la distance d'une matrice $E$ à $\mathcal{S}$ est donnée par

$$\|E - p(E)\| = \|E - \frac{E + {}^tE}{2}\| = \|\frac{E - {}^tE}{2}\|.$$

Ainsi, si $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}$ (reprenons $n = 2$), on a

$$\|E - p(E)\| = \| \begin{pmatrix} 0 & \frac{m_{1,2}-m_{2,1}}{2} \\ \frac{m_{2,1}-m_{1,2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \| = \frac{|m_{2,1} - m_{1,2}|}{2}.$$

Déterminer la distance d'une matrice arbitraire de $E$ à $S$.

4. *On fixe la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *Déterminer une base orthonormée pour* $A^\perp$*.*

Considérons une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors

$$\langle M, A\rangle = tr(M^tA) = tr(MA) = tr\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = tr\left(\begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}\right) = a+b+c+d.$$

Donc $M \in A^\perp$ si et seulement si $a + b + c + d = 0$, autrement dit $a = -b - c - d$ et donc $M$ se décompose comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} -b-c-d & b \\ c & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc les trois matrices $M_1, M_2, M_3$ ci-dessus forment une famille génératrice de $A^\perp$, et donc une base car $A^\perp$ est de dimension $3 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - 1$. Cependant, cette base n'est pas orthogonale puisqu'on a

$$\langle\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\rangle = 1, \quad \langle\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle = 1, \quad \langle\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle = 1.$$

On va donc l'orthogonaliser avec Gram-Schmidt. Gardons $E_1 = M_1$ et prenons

$$E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\phi(M_1, M_2)}{\|M_1\|^2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Prenons ensuite

$$\begin{aligned}E_3 &= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \frac{\phi(M_1, M_3)}{\|M_1\|^2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \frac{\phi(E_2, M_3)}{\|E_2\|^2} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

car on vérifie alors que $\|E_2\|^2 = \frac{3}{2}$ et $\langle E_2, M_3\rangle = \frac{1}{2}$. On obtient ainsi une base orthogonale $E_1, E_2, E_3$ qu'il suffit de renormaliser. On trouve $\|E_1\| = \sqrt{2}, \|E_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\|E_3\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(f) *Déterminer pour une matrice arbitraire de $E$ sa projection orthogonale sur $A^\perp$.* Nous venons de voir que les matrices

$$E_1 = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad E_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \qquad E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

forment une base orthogonale de $A^\perp$, qui est un hyperplan de $E$. Ainsi, si $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ est un élément de $E$, on a

$$\begin{aligned}p(E) &= \frac{\langle M, E_1\rangle}{\|E_1\|^2}E_1 + \frac{\langle M, E_2\rangle}{\|E_2\|^2}E_2 + \frac{\langle M, E_3\rangle}{\|E_3\|^2}E_3\\ &= \frac{b-a}{2}E_1 + \frac{2}{3}\left(c - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)E_2 + \frac{3}{4}\left(d - \frac{a+b+c}{3}\right)E_3\\ &= \begin{pmatrix}\frac{3a-b-c-d}{4} & \frac{3b-a-c-d}{4}\\ \frac{3c-a-b-d}{4} & \frac{3d-a-b-c}{4}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

où les coefficients sont calculés explicitement en multipliant la formule (2), et la matrice finale est obtenue en calculant chaque coefficient tour à tour, et en simplifiant les fractions rationnelles obtenues.

**Autre méthode (plus rapide)** : Au lieu de projeter sur $A^\perp$, on aurait pu également considérer simplement la projection $p'$ sur $\mathrm{Vect}(A)$ parallèlement à $A^\perp$, et on aurait alors obtenu $p(A)$ par la différence $A - p'A)$.
La projection $p'$ est plus simple à calculer car il s'agit d'une projection sur une droite : on a

$$p'(E) = \frac{\phi(A, E)}{\|A\|^2}A = \frac{a+b+c+d}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

et donc on retrouve bien

$$\begin{aligned}p(E) &= \begin{pmatrix}a - m_E & b - m_E\\ c - m_E & d - m_E\end{pmatrix} \quad \text{où } m_E = \frac{a+b+c+d}{4}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{3a-b-c-d}{4} & \frac{3b-a-c-d}{4}\\ \frac{3c-a-b-d}{4} & \frac{3d-a-b-c}{4}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

**Exercice 17.**

Dans $Mat_n(\mathbb{R})$ on note $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques. On muni $Mat_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $< M, N >= \sum_{i,j} m_{ij}n_{ij}$ où $m_{ij}$ sont des coefficients de $M$ et $n_{ij}$ sont ceux de $N$.

1. *Vérifier que pour $M, N \in Mat_n(\mathbb{R})$, $< M, N >= tr({}^tM \cdot N)$.* Supposons $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $N = (n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, alors ${}^tM = (m_{j,i})_{1\leq i,j\leq n}$ et donc si on note $L$ la matrice ${}^tLN$, on obtient que

$$l_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} m_{k,i}n_{k,j}$$

et donc

$$tr({}^tM \cdot N) = \sum_{1\leq i\leq n} l_{i,i} = \sum_{1\leq i,k\leq n} m_{k,i}n_{k,i} = \langle M, N\rangle.$$

2. – 4. C'est comme pour la question 3 de l'exercice précédent : on montre que $Mat_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}\oplus\mathcal{S}^{\perp} = \mathcal{S}\oplus\mathcal{A}$ et la décomposition d'une matrice $A$ de $Mat_n(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}.$$

5. *Dans $Mat_2(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la distance entre $M$ et $\mathcal{S}$, la distance entre $M$ et $\mathcal{A}$, puis entre $p_{\mathcal{S}}(M)$ et $p_{\mathcal{A}}(M)$.*
Si on décompose $M$ comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique comme ci-dessus, on obtient

$$M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\in\mathcal{S}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}_{\in\mathcal{A}}$$

On obtient ainsi :

$$d(M, \mathcal{S}) = \|M - p_{\mathcal{S}}(M)\| = \| \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \| = \sqrt{8},$$

$$d(M, \mathcal{A}) = \|M - p_{\mathcal{A}}(M)\| = \| \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \| = 3\sqrt{2},$$

et enfin

$$\|p_{\mathcal{S}}(M) - p_{\mathcal{A}}(M)\| = \| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \| = \sqrt{26}.$$

En fait, par le théorème de Pythagore, et puisque $p_{\mathcal{S}}$ et $p_{\mathcal{A}}$ sont orthogonaux, on aurait pu directement voir que

$$\|\|p_{\mathcal{S}}(M) - p_{\mathcal{A}}(M)\| = \|M\| = \|p_{\mathcal{S}}(M) + p_{\mathcal{A}}(M)\| = \sqrt{26}.$$