
Fiche 2

Rappel. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, A une partie de E . L'orthogonal de A est l'ensemble, noté A^\perp , constitué de vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A : $A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}$.

Exercice 1. Gram-Schmidt, exemples

- On munit \mathbb{R}^3 du produit scalaire usuel.
 - Trouver une base orthonormée pour le plan $(2, -3, 6)^\perp$.
 - Montrer que (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 2, 2)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - Trouver une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 telle que e_1 soit colinéaire à u_1 , et que le plan engendré par e_1 et e_2 soit égal à celui engendré par u_1, u_2 .
- Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 .
 - Montrer que l'application $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $b(P, Q) \mapsto \int_{-2}^2 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
 - En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, construire à partir de $(1, X, X^2, X^3)$ une base orthonormée.

Exercice 2. Calcul d'orthogonaux

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on définit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle X, Y \rangle = {}^t X A Y$.

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 . Calculer une base pour chacun des orthogonaux de $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et de $X = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 3.

On considère le vecteur $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer la matrice P_1 de la projection orthogonale sur \mathbf{a} et la matrice P_2 de la projection orthogonale sur un vecteur perpendiculaire à \mathbf{a} .
- Calculer $P_1 + P_2$ et $P_1 P_2$. Expliquer les résultats obtenus.

Exercice 4. Propriétés de projecteurs

Soit a un vecteur de \mathbb{R}^n . On pose $P = \frac{a \cdot {}^t a}{a \cdot a}$. Montrer que $P^2 = P$ et que la trace de P est égale à 1.

Exercice 5. Sur les projecteurs.

Soit $p : E \rightarrow E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n .

- On dit que p est un projecteur si $p^2 = p$.
 - Soient F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G$. On dit que p est la projection sur F parallèlement à G si pour tout $(f, g) \in F \times G$, $p(f + g) = f$.
- On suppose que p est un projecteur. Montrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ et que p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.
 - On suppose que p est la projection sur F parallèlement à G . Montrer que p est un projecteur.

On suppose maintenant que E est muni d'un produit scalaire. On dit que p est un projecteur orthogonal s'il existe un sous-espace F tel que p soit la projection sur F parallèlement à F^\perp .

3. Soit p un projecteur de E . Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :
 $\forall (x, y) \in \text{Im}(p) \times \text{Ker}(p), \langle x, y \rangle = 0$.

Exercice 6. Projection orthogonale

Déterminer la projection orthogonale du point $b = (2, 4, 4)$ sur la droite D passant par l'origine de vecteur-directeur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de b à D .

Exercice 7.

Déterminer dans \mathbb{R}^n l'angle du vecteur ${}^t(1, 1, \dots, 1)$ avec les axes. Déterminer la matrice P de la projection orthogonale sur ce vecteur.

Exercice 8.

On se donne $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans \mathbb{R}^3 . Soit $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Calculer la matrice de p_F , projecteur orthogonal sur F , dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Trouver une base B pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 1, 0)$.
3. Déterminer toutes les bases de \mathbb{R}^3 pour lesquelles la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 1, 0)$.

Exercice 9.

Déterminer la matrice de la projection orthogonale de \mathbb{R}^3 sur l'intersection des plans d'équation $x + y + z = 0$ et $x - z = 0$.

Exercice 10. Moindres carrés

Déterminer la solution \hat{x} des moindres carrés des équations $3x = 10$ et $4x = 5$. Vérifier que l'erreur commise est un vecteur orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Moindres carrés en dim 3

Déterminer la solution \hat{x} des moindres carrés d'équation $\mathbf{A}x = b$, en déterminant $\mathbf{p} = \mathbf{A}\hat{x}$ pour

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que le vecteur d'erreur $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ est orthogonal aux vecteurs des colonnes de \mathbf{A} .

Exercice 12.

Soit V le sous-espace de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $\mathbf{a}_1 = {}^t(1, 1, 0, 1)$ et $\mathbf{a}_2 = {}^t(0, 0, 1, 0)$. Déterminer :

1. une base de supplémentaire orthogonal V^\perp ,
2. la matrice P de la projection orthogonale sur V ,
3. le vecteur v de V^\perp , le plus proche du vecteur $b = {}^t(0, 1, 0, -1)$.

Exercice 13.

Dans \mathbb{R}^6 soit $H = \{(x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de H^\perp puis la distance entre $u = {}^t(1, -1, 0, 2, 4, 0)$ et H .

Exercice 14. La géométrie des polynômes

On se place dans le \mathbb{R} -espace vectoriel E des polynômes de degré au plus 3, à coefficients réels. On munit E du produit scalaire suivant :

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 .$$

On définit $H = \{P \in E : P(1) = 0\}$.

1. Montrer que H est un hyperplan de E , un hyperplan dans l'espace vectoriel E c'est un sous-espace de E tel que sa dimension est égale à $\dim E - 1$.
2. Déterminer une base orthonormée de H .
3. Dédire de la question précédente la projection orthogonale de X sur H . Compléter la base que vous avez déterminée dans de la question précédente à une base de E de votre choix, et écrire la matrice de la projection orthogonale sur H dans cette base.
4. Déterminer la distance d'un polynôme $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ à H en fonction de ses coefficients $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et a_0, \dots, a_n des réels distincts deux à deux. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i).$$

1. Vérifier qu'avec cette application, E est muni d'un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormée de E .
3. Pour $Q \in E$ quelconque, déterminer la distance de Q à $H = \{P \in E \mid \sum_{i=1}^n P(a_i) = 0\}$

Exercice 16. La géométrie des matrices

On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire suivant : $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(A, B) = \text{tr}(A {}^tB)$

1. Montrer que ϕ définit un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormée pour le sous-espace S des matrices symétriques.
3. Écrire une matrice arbitraire de E comme combinaison linéaire de ses coordonnées dans S et S^\perp .
4. Déterminer la distance d'une matrice arbitraire de E à S .
5. On fixe la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Déterminer une base orthonormée pour A^\perp .
6. Déterminer pour une matrice arbitraire de E sa projection orthogonale sur A^\perp .

Exercice 17.

Dans $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ on note \mathcal{S} le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et \mathcal{A} celui des matrices antisymétriques. On muni $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M, N \rangle = \sum_{i,j} m_{ij}n_{ij}$ où m_{ij} sont des coefficients de M et n_{ij} sont ceux de N .

1. Vérifier que pour $M, N \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N \rangle = \text{tr}({}^tM \cdot N)$.
2. Soit $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$. Remarquer que $\langle {}^tS, {}^tA \rangle = \langle S, A \rangle$. En déduire que $\langle S, A \rangle = 0$.
3. Dédire de la question précédente que $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}^\perp$ puis que $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$.
4. On conclut alors que $\text{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$. Soit $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'unique $S \in \mathcal{S}$ et l'unique $A \in \mathcal{A}$ en fonction de M telles que $M = S + A$.
5. Dans $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la distance entre M et \mathcal{S} , la distance entre M et \mathcal{A} , puis entre les projections $p_{\mathcal{S}}(M)$ et $p_{\mathcal{A}}(M)$.