Fiche 1

Exercice 1 (Changement de base $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.) Soit $E = \mathbb{R}^2$ avec la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$. Pour deux vecteurs arbitraires $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ on définie une forme bilinéaire β par la formule $\beta(U, V) = aa' + 2ab' + 4a'b + 5bb'$. Soit $\mathcal{B}'$ une base formée de vecteurs $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter M, la matrice de β dans la base canonique $\mathcal{B}$.
2. Calculer la matrice de la forme β dans la base $\mathcal{B}'$ de deux façons différentes :
   (a) en multipliant les vecteurs f_i et f_j pour tous $i, j \in \{1, 2\}$;
   (b) en calculant la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$ et en utilisant la formule $M' = {}^tPMP$.
   (c) Decomposer la matrice M en somme de la matrice symétrique et antisymétrique. Presenter la forme bilinéaire β comme la somme de la forme bilinéaire symétrique et de la forme bilinéaire anti-symétrique.

Exercice 2 (Changement de base $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.) Soit $E = \mathbb{R}^3$ avec la base canonique. Pour deux vecteurs arbitraires $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ on définie une forme bilinéaire ϕ par la formule $\phi(v_1, v_2) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$. Soit M la matrice de la forme billinéaire ϕ dans la base canonique (expliciter !)

Soit B une base formée de vecteurs $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Calculer la matrice de la forme ϕ dans cette base B de deux façons différentes :

1. en multipliant les vecteurs h_i et h_j pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}$;
2. en calculant la matrice de passage C de la base canonique vers la base B et en utilisant la formule $M' = {}^tCMC$.

Exercice 3 (Matrice orthogonale) Soit E un espace réel de dimension fini n et $\mathcal{B}_e = \{e_i\}$ et $\mathcal{B}_f = \{f_i\}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$ deux bases de cet espace. Soit C la matrice de passage de $\mathcal{B}_e$ vers $\mathcal{B}_f$.

1. Soit A une matrice d'une appplication linéaire $\phi : E \to E$ dans la base $\mathcal{B}_e$. Exprimer la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}_f$ en fonction de A et C. Notons la A'.
2. On considère la forme bilinéaire $\beta : E \times E \to \mathbb{R}$ donnée par la même matrice A dans la base $\mathcal{B}_e$. Exprimer la matrice de β dans la base $\mathcal{B}_f$ en fonction de A et C. Notons la A''.
3. On suppose que $C^{-1} = {}^tC$. Remarquer que alors on a $C \cdot {}^tC = I$, où I est la matrice d'identité. En plus pour une telle matrice de passage on a $A' = A''$. Soient $(c_{ij})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ - les entrées de la matrice C. On considère les vecteurs-colonnes de C : $v_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \cdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que : **a.** $c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \cdots + c_{ni}^2 = 1, \quad \forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$,
   b. $c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \cdots + c_{ni}c_{nj} = 0$, si $i \neq j$, **c.** $|c_{ij}| \leq 1, \quad \forall\, i, j \in \{1, \cdots, n\}$.

(b) Que peut-on dire sur l'ensemble de vecteurs $v_i,\ i \in \{1, \cdots, n\}$?

(c) Trouver les conditions similaires aux **a.** et **b.** sur les entrées des vecteurs $w_i = \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \cdots \\ c_{in} \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Produit scalaire : exemples élémentaires)

1. Les formes suivantes sont-elles des produits scalaires ?
   (a) L'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui au couple de vecteurs (u, u') associe $xx' + yy' + xy' + yx'$ si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans une base fixée.
   (b) L'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui au couple de vecteurs (u, u') associe $2xx' + 3yy' + 2xy' + 2x'y$ si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans une base fixée.
   (c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit E l'espace des fonctions continues $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit $\beta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\beta(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.
2. Quelles sont les conditions sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que l'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\beta((x, y), (x', y')) = axx' + 2bxy' + 2bx'y + byy'$ soit un produit scalaire.
3. On notera V les nombres complexes que l'on verra comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Vérifier que $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque paire de nombres complexes (α, β) associe $\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta})$ est un produit scalaire.

Exercice 5 (D'autres exemples, orthogonalité) Les applications suivantes définissent-elles des produits scalaires sur les espaces vectoriels considérés ? Si oui, (et lorsque cela a un sens) préciser si la base canonique de l'espace vectoriel considéré est orthogonale pour ce produit scalaire.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par :
$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application ψ définie sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ par :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \psi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$
3. On note $E = \mathcal{C}([-1; 1]; \mathbb{R})$ et on considère l'application définie par
$$\forall f, g \in E, \quad b(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)\mathrm{d}t.$$

Exercice 6 (Cauchy-Schwarz) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer pour tout $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ on a $\left(\int_a^b |f(t)|dt\right)^2 \leq (b - a)\int_a^b f(t)^2 dt$. Préciser le cas d'égalité.

Exercice 7 (Cauchy-Schwarz) Soient A et B deux matrices $n \times n$ symétriques. En choisissant un produit scalaire sur l'espace des matrices $n \times n$ montrer que $(\mathrm{tr}(AB + BA))^2 \leq 4\mathrm{tr}A^2 \cdot \mathrm{tr}B^2$.

Exercice 8 (Caractérisation d'un produit scalaire)

1. Soit $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On note $\|\ \|$ la norme associée à ce produit scalaire. Montrer les trois formules de polarisations :
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2).$$
Montrer que $\|\ \|$ vérifie l'identité du parallélogramme, i.e.
$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\| \ \|$ vérifiant l'identité du parallélogramme. Pour tout $(x,y) \in E^2$, on pose $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.
   (a) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ et $\varphi(x,x) = \|x\|^2$.
   (b) Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x, 2y) = 2\varphi(x,y)$. Indication : démarrer avec $\|x+2y\|^2 + \|x\|^2$.
   (c) Montrer que pour tous $x, y, z \in E$, $\varphi(x+z, y) = \varphi(x,y) + \varphi(z,y)$.
   (d) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, pour tous $x, y \in E$, $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y)$. Montrer que ceci est encore vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ puis pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (e) En déduire que toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est induite par un produit scalaire.
3. Montrer que la norme $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$ sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas associée à un produit scalaire.

Exercice 9 (Produits scalaires complexes, les matrices)

1. Montrer que l'application $\langle \ , \ \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \to \mathbb{C}$ définie par $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\overline{A} \cdot B)$ est un produit scalaire.
2. Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. On note $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Montrer que $\langle A, B\rangle = \displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} \overline{a_{ij}} \cdot b_{ij}$.

Exercice 10 (Produits scalaires complexes, les polynômes) Soit $\varphi : \mathbb{C}[X]^2 \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})}Q(e^{it})dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire hermitien.
2. Montrer que la base canonique de $\mathbb{C}[X]$ est une base orthonormée.

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.

3. Calculer $\|Q\|^2$ en fonction des a_i.
4. Soit $M = \sup\{|Q(z)| \ ; \ z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1\}$.
   Montrer que $M \ge 1$ et que : $M = 1$ if and only if $Q = X^n$.

Exercice 11 (Des complexes aux réels) Soit $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = \mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

Exercice 12 (Produit scalaire, bases) Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont la diagonale est constituée de $a_1, \dots, a_n$. Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(X,Y) = {}^tX \cdot A \cdot Y$. Notez que φ est à valeurs dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mais on identifie ce dernier à $\mathbb{R}$ par un abus de notations.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que φ soit un produit scalaire.
2. Sous cette condition, montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ est une base orthogonale.
3. Toujours sous la même condition, déterminer une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Exercice 13 (Familles indépendantes infinies) On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel : $\forall f, g \in E, \quad \varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $h_n : t \in [0;1] \longmapsto \cos(2\pi nt)$.

1. Montrer que la famille d'applications $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie.