Corrigé Devoir Maison 2

Exercice 1. Méthode des moindres carrés

On veut calculer les valeurs d'une fonction $f(x)$ pour toutes les valeurs de x, mais on ne connaît pas f explicitement. Ceci se produit typiquement lorsque f n'est connue qu'en certains points expérimentaux. On considère la fonction f dont 3 points du graphique sont connus : $f(0) = 1, f(1) = 3$ et $f(2) = 7$.

1. *On propose de chercher f dans la famille des polynômes.*
   (a) *Quel est le degré n du polynôme d'interpolation P tel que le problème admette une solution unique ? Expliquer.*
   (b) *Écrire le système d'équations qui détermine les coefficients (a, b, c) de ce polynôme ($P(x) = ax^2 + bx + c$) et le résoudre.*
2. *On considère maintenant que les mesures sont entachées d'erreurs et que les valeurs d'une fonction g ne sont qu'approximatives : ($g(0) \approx 1, g(1) \approx 3$ et $g(2) \approx 7$). On cherche alors une fonction g de la forme $g(x) = u(x-1)^4 + vx^2$ (cette forme nous est communiquée par les forces suprêmes, comme un huissier de justice, ou un membre du C.A. de l'université, bref, en dehors de notre influence).*
   (a) *On met les trois valeurs de x : $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$ et les valeurs approximatives de g en ses points pour obtenir trois équations linéaires sur u et v. Peut-on trouver une fonction de la forme $g(x) = u(x-1)^4 + vx^2$ qui passe exactement par les trois points expérimentaux ?*
   (b) *Écrire ce système linéaires d'équations sur u et v sous forme matricielle.*
   (c) *Écrire une équation matricielle sur u et v dans le cadre des moindres carrés et la résoudre.*
   (d) *Mettre les valeurs de u et v trouvées et calculer g en les points d'abscisse respective $x = 0, 1, 2$. On n'aura pas les résultats $1, 3, 7$ mais expliquer en quel sens le résultat obtenu pour ces u et v est le meilleur parmi tous les u et v possibles parmi les fonctions de la forme $u(x-1)^4 + vx^2$.*

Correction

1.(a) On veut chercher f sous la forme d'un polynôme tel que $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ et $f(2) = 7$, autrement dit que f passe par trois points.

Si f est de degré n, avec $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, alors on a $n + 1$ coefficients à déterminer. Pour obtenir ces $n + 1$ coefficients de manière unique, il nous faudrait alors $n + 1$ équations, et que la matrice associée au système de ces $n + 1$ équations soit inversible. Ici, on va obtenir 3 équations, donc il faut prendre $n = 2$ et chercher f sous la forme d'un polynôme de degré 2.

1.(b) Soit $f = aX^2 + bX + c$. Alors

$$f(0) = 1, f(1) = 3, f(2) = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On remarque que, quelles que soient les valeurs à droite, ce système admet une unique solution si et seulement si la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible, ce qui est le cas puisque $\det(M) = 2$ (à vérifier). Donc le système admet bien une solution unique, et ici on trouve $c = 1$, puis $a = b = 1$.

2.(a) On cherche $g(x)$ sous la forme $u(x-1)^4+vx^2$ qui passe par les points $(0,1)$, $(1,3)$ et $(2,7)$. Si on écrit le système donné par les trois équations, on obtient

$$\begin{cases} (0-1)^4u+0^2v=1 \\ (1-1)^4u+1^2v=3 \\ u(2-1)^2+2^2v=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=3 \\ u+4v=7 \end{cases}$$

ce qui n'admet pas de solution.

2.(b) L'écriture matricielle du système ci-dessus est la suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2.(c) Si on considère la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, l'équation $M\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ n'a pas de solution, donc on va utiliser les moindres carrés et résoudre $M\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=p_M(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix})$ où p_M est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(M)=\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Méthode 1. On orthogonalise la base $((1,0,1),(0,1,4))$ pour déterminer la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,4))$. En faisant ceci, on obtient alors $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ et $e_2=\frac{1}{3}(-2,1,2)$. On a alors

$$\begin{aligned} p_M(a) &= \langle a,e_1\rangle e_1+\langle a,e_2\rangle e_2 \\ &= \frac{8}{\sqrt{2}}e_1+5e_2=(4,0,4)+\frac{5}{3}(-2,1,2)=\frac{1}{3}(2,5,22). \end{aligned}$$

Et on peut résoudre $M\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 22 \end{pmatrix}$, on trouve $u'=\frac{2}{3}$, $v'=\frac{5}{3}$.

Méthode 2. Notons b le vecteur colonne ${}^t(1,3,7)$. On veut chercher u',v' tels que $M\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}=p_M(b)$. On sait par propriété de la projection sur les colonnes de M que ${}^tMb={}^tMp_M(b)$, puisque

$${}^tMb=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \langle {}^t(1,0,1),b\rangle \\ \langle {}^t(0,1,4),b\rangle \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \langle {}^t(1,0,1),p_M(b)\rangle \\ \langle {}^t(0,1,4),p_M(b)\rangle \end{pmatrix}$$

et donc ${}^tMM\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}={}^tMb \Rightarrow \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}=({}^tMM)^{-1}M\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. On calcule:

$${}^tMM=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}, \qquad ({}^tMM)^{-1}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

qui est le vecteur cherché.

2.(d) La solution approchée est donc donnée par $g(x)=\frac{2}{3}(x-1)^4+\frac{5}{3}x^2$. On a alors

$$g(0)=\frac{2}{3}, g(1)=\frac{5}{3}, g(2)=\frac{22}{3}$$

d'où l'on retrouve que $p_M(a) = \frac{1}{3}(2,5,22)$. La solution (u',v') trouvée est la meilleure en le sens où $\frac{1}{3}(2,5,22)$ est le vecteur de $\mathrm{Vect}((1,0,1),(0,4,1))$ le plus proche de $(1,3,7)$ par définition de la projection orthogonale. La distance minimale entre $(1,3,7)$ et $\mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,4))$ est alors donnée par

$$\|p_M(a) - a\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{5}{3}-3\right)^2 + \left(\frac{22}{3}-7\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Exercice 2. Matrices orthogonales

1. **Exemple en dimension 2.** *On considère une base de $\mathbb{R}^2$ donnée par deux vecteurs $\{a_1, a_2\}$ de coordonnées respectives $(3,4)$ et $(1,-1)$. On note A la matrice*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

dont les vecteurs-colonnes sont ces deux vecteurs de base (on peut la voir comme la matrice de passage de la base canonique vers la base $\{a_1, a_2\}$).

   (a) *Utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormale $\{e_1, e_2\}$ telle que le premier vecteur e_1 soit colinéaire avec a_1.*
   (b) *Écrire la matrice de passage de la base canonique vers la base $\{e_1, e_2\}$. Notons la B.*
   (c) *Remarquer que $B^{-1} = {}^tB$ et expliquer pourquoi on peut l'affirmer sans faire de calcul.*
   (d) *Écrire la matrice de passage de la base $\{e_1, e_2\}$ vers la base $\{a_1, a_2\}$.*
   (e) *Trouver, en expliquant pourquoi celle-ci est unique, la matrice C telle que $A = B \cdot C$.*

Correction :

1.(a) On va orthonormaliser la famille (a_1, a_2) par le procédé de Gram-Schmidt, avec $a_1 = (3,4)$ et $a_2 = (1,-1)$.
On va normer $u_1 = a_1$: on a $\|a_1\|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ donc $e_1 = \frac{1}{5}(3,4)$.
On a $u_2 = (1,-1) + \frac{\langle a_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}(3,4) = (1,-1) + \frac{1}{25}(3,4) = \left(\frac{28}{25}, -\frac{21}{25}\right)$. Il reste à le normer: on obtient en calculant et simplifiant que

$$\|u_2\|^2 = \frac{49}{25}$$

donc finalement $e_2 = \frac{1}{5}(4,-3)$.

1.(b) On vient de calculer $e_1 = \frac{1}{5}(3,4)$ et $e_2 = \frac{1}{5}(4,-3)$ donc si B est la matrice de passage de la base canonique (que l'on note $\{b_1, b_2\}$) vers la base $\{e_1, e_2\}$, on a alors

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \end{array} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

1.(c) On a bien la matrice identité: ${}^tBB = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Donc $B^{-1} = {}^tB$. En fait, on aurait pu le dire directement car ceci est la propriété d'une matrice orthogonale et B, en tant que matrice de passage d'une base orthonormale $\{b_1, b_2\}$ vers une base orthonormale $\{e_1, e_2\}$, est nécessairement une matrice orthogonale (cf cours).

1.(d) Pour écrire la matrice de passage de la base $\{e_1, e_2\}$ vers la base $\{a_1, a_2\}$, on va décomposer les vecteurs a_1 et a_2 dans la base $\{e_1, e_2\}$. Premièrement, il est évident par construction que

$$a_1 = 5e_1 + 0e_2 \text{ puisque } e_1 = \frac{1}{5}a_1.$$

De plus, on a $a_2 = \alpha e_1 + \beta e_2$ si et seulement si

$$\begin{cases} 1 = \frac{3}{5}\alpha + \frac{4}{5}\beta \\ -1 = \frac{4}{5}\alpha - \frac{3}{5}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{5}, \beta = \frac{7}{5}$$

Donc la matrice de passage cherchée est

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

1.(e) On a deux méthodes ici: on sait que la matrice B est orthogonale, donc B est inversible et $B^{-1} = {}^tB$. Donc si C vérifie $A = BC$, alors nécessairement $C = B^{-1}A$ est uniquement déterminée. Il faut ensuite calculer pour la trouver.

Autrement, on peut interpréter C comme une matrice de passage. Rappelons que si E est un espace vectoriel, et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E, alors on a la propriété des matrices de passage:

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}.$$

Ceci provient des propriétés de composition des applications linéaires, une matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ n'étant rien d'autre qu'une matrice de l'application identité dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Ici, on a alors schématiquement $A : \{b_1, b_2\} \to \{a_1, a_2\}$ et $B = \{b_1, b_2\} \to \{e_1, e_2\}$. Donc si on veut $A = BC$, par cette propriété c'est que C est la matrice de passage de la base $\{e_1, e_2\}$ vers la base $\{a_1, a_2\}$. Autrement dit c'est la matrice obtenue à la question précédente.

Remarque : On peut ici vérifier en calculant $B^{-1}A = {}^tBA = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$.

2. **Cas général.** *On se place dans un espace réel de dimension n. Soit $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ une base, et A la matrice de passage de la base canonique vers cette base $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Soit $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base orthonormée obtenue de la base $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ par le procédé de Gram-Schmidt. On note Q la matrice de passage de la base canonique vers cette nouvelle base orthonormée. On voudrait établir le lien entre ces deux matrices A et Q. Rappel. On définit la projection orthogonale d'un vecteur a sur la droite portée par u :*

$$\texttt{proj}_u a = \frac{\langle u, a\rangle}{\langle u, u\rangle} u.$$

Le procédé Gram-Schmidt nous donne

$$\begin{array}{ll} u_1 = a_1; & e_1 = u_1/\|u_1\| \\ u_2 = a_2 - \texttt{proj}_{u_1} a_2; & e_2 = u_2/\|u_2\| \\ u_3 = a_3 - \texttt{proj}_{u_1} a_3 - \texttt{proj}_{u_2} a_3; & e_3 = u_3/\|u_3\| \\ u_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \texttt{proj}_{u_i} a_k; & e_k = u_k/\|u_k\| \end{array}$$

(a) Vérifier que

$$\begin{array}{ll} 1. & a_1 = \langle e_1, a_1\rangle e_1 \\ 2. & a_2 = \langle e_1, a_2\rangle e_1 + \langle e_2, a_2\rangle e_2 \\ 3. & a_3 = \langle e_1, a_3\rangle e_1 + \langle e_2, a_3\rangle e_2 + \langle e_3, a_3\rangle e_3 \end{array}$$

Indication. Il y a au moins deux façons de le faire : - dans la partie droite de chaque équation 1.,2.,3. on fait des substitutions et des simplifications pour arriver à la partie gauche - ou bien on interprète ces égalités à l'aides des projections correspondantes...

(b) Donner l'expression similaire pour a_k, $k \geq 4$ (sans vérification).

(c) On veut écrire la relation

$$A = QR,$$

Trouver les entrées de la matrice R en fonction des produits scalaires $\langle e_i, a_j\rangle$. Affirmer que la matrice R est triangulaire supérieure.

(d) Montrer que les coefficients sur la diagonale de R sont strictement positifs.

(e) Montrer que la décomposition de A en produit d'une matrice orthogonale et matrice triangulaire supérieure (avec les coefficents sur la diagonale positifs) est unique. Indication. Supposer qu'il y a deux décompositions différentes

$$A = Q_1R_1 = Q_2R_2$$

avec Q_1, Q_2 deux matrices orthogonales et R_1R_2 deux matrices triangulaires supérieures.

Correction :

2.(a) Respectons les deux façons proposées par l'énoncé. D'abord, par le calcul: on va partir des membres de droite, remplacer les e_i par leurs valeurs données par le procédé de Gram-Schmidt et tenter de retrouver le membre de gauche. On a

$$\langle e_1, a_1\rangle e_1 = \langle \frac{a_1}{\|a_1\|}, a_1\rangle \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{\langle a_1, a_1\rangle}{\|a_1\|} \frac{a_1}{\|a_1\|} = a_1$$

puisque $\|a_1\|^2 = \langle a_1, a_1\rangle$. Donc c'est bon pour la première, passons à la deuxième. Notons tout d'abord que $\texttt{proj}_{u_1} a_2 = \frac{\langle u_1, a_2\rangle}{\|u_1\|^2} = \frac{\langle a_1, a_2\rangle}{\|a_1\|^2}$. On a

$$\begin{aligned}
\langle e_1, a_2\rangle e_1 + \langle e_2, a_2\rangle e_2 &= \langle \frac{a_1}{\|a_1\|}, a_2\rangle \frac{a_1}{\|a_1\|} + \langle \frac{u_2}{\|u_2\|}, a_2\rangle \frac{u_2}{\|u_2\|} \\
&= \frac{\langle a_1, a_2\rangle}{\|a_1\|^2} a_1 + \frac{1}{\|u_2\|^2} \langle u_2, u_2 + \texttt{proj}_{u_1} a_2\rangle u_2 \\
&= \frac{\langle a_1, a_2\rangle}{\|a_1\|^2} a_1 + \frac{1}{\|u_2\|^2} \langle u_2, u_2 + \frac{\langle a_1, a_2\rangle}{\|a_1\|^2} u_1\rangle u_2 \\
&\underset{*}{=} \frac{\langle a_1, a_2\rangle}{\|a_1\|^2} a_1 + \frac{1}{\|u_2\|^2} \langle u_2, u_2\rangle u_2 \\
&= \frac{\langle a_1, a_2\rangle}{\|a_1\|^2} a_1 + u_2 = \frac{\langle a_1, a_2\rangle}{\|a_1\|^2} a_1 + a_2 - \texttt{proj}_{u_1} a_2 = a_2.
\end{aligned}$$

où l'égalité $*$ utilise le fait que par construction u_2 est orthogonal à u_1. On pourrait procéder de même pour la troisième. Cependant, cela est fastidieux, le mieux est d'utiliser des formules de projections orthogonales dans certains sous-espaces vectoriels.

En effet, d'après le procédé de Gram-Schmidt, on sait que pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $\mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Donc a_2 est un vecteur de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Puisque par construction on a que la base (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, la formule de décomposition dans une base orthonormée donne alors directement (cf cours)

$$a_2 = \langle a_2, e_1\rangle e_1 + \langle a_2, e_2\rangle e_2.$$

De même, $a_3 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ donc par décomposion dans la base orthonormale $\{e_1, e_2, e_2 = 3\}$ de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, on a

$$a_3 = \langle a_3, e_1\rangle e_1 + \langle a_3, e_2\rangle e_2 + \langle a_3, e_3\rangle e_3.$$

2.(b) Par un argument similaire, on montrait donc de même que a_k se décompose dans $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ comme suit:

$$a_k = \langle a_k, e_1\rangle e_1 + \langle a_k, e_2\rangle e_2 + \cdots + \langle a_k, e_k\rangle e_k.$$

2.(c) Idem que pour la question (e) de la partie 1, nous allons interpréter R comme une certaine matrice de passage. Notons $(b_1, \ldots, b_n)$ la base canonique de l'espace. On sait que $Q : \{b_1, \ldots, b_n\} \to \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $A : \{b_1, \ldots, b_n\} \to \{a_1, \ldots, a_n\}$ sont les matrices de passage de la base canonique vers les bases $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{a_1, \ldots, a_n\}$ respectivement. Donc si on a $A = QR$, c'est que R est la matrice de passage de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ vers la base $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Pour déterminer R, il faut donc calculer les décompositions des vecteurs a_i, $1 \leq i \leq n$ dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. **C'est ce qui a été fait à la question précédente.** On en déduit que la matrice R est donnée par

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{array} \\
\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{array} &
\begin{pmatrix}
\langle e_1, a_1\rangle & \langle e_1, a_2\rangle & \langle e_1, a_3\rangle & \cdots & \langle e_1, a_n\rangle \\
0 & \langle e_2, a_2\rangle & \langle e_2, a_3\rangle & \cdots & \langle e_2, a_n\rangle \\
0 & 0 & \langle e_3, a_3\rangle & \cdots & \langle e_3, a_n\rangle \\
\vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \langle e_n, a_n\rangle
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Donc cette matrice est bien triangulaire supérieure.

2.(d) Les coefficients diagonaux de R sont donnés par les $\langle e_k, a_k\rangle$ pour $1 \leq k \leq n$. Montrons qu'ils sont strictement positifs. Pour $k = 1$, $\langle e_1, a_1\rangle = \langle \frac{u_1}{\|u_1\|}, u_1\rangle = \|u_1\| > 0$ puisque $u_1 \neq 0$. Si $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\langle e_k, a_k\rangle &= \frac{1}{\|u_k\|} \langle u_k, u_k + \sum_{i=1}^{k-1} \texttt{proj}_{u_i} a_k\rangle \\
&= \frac{1}{\|u_k\|} \langle u_k, u_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, a_k\rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\
&= \frac{1}{\|u_k\|} \langle u_k, u_k\rangle + \frac{1}{\|u_k\|} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, a_k\rangle}{\|u_i\|^2} \langle u_k, u_i\rangle \\
&= \frac{1}{\|u_k\|} \langle u_k, u_k\rangle = \|u_k\|
\end{aligned}$$

puisque pour tout $1 \leq i \leq k-1$, u_i est orthogonal à u_k par Gram-Schmidt, et donc au final la quantité $\langle e_k, a_k \rangle$ est strictement positive en tant que norme d'un vecteur non nul (puisque Gram-Schmidt appliqué à un vecteur non nul ne donnera jamais 0.).

Donc R est bien triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux strictement positifs.

2.(e) Supposons qu'il existe deux décompositions

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2 \tag{1}$$

où Q_1, Q_2 sont orthogonales, et R_1, R_2 sont triangulaires supérieures avec des coefficients diagonaux strictement positifs. Notons deux choses:

- Le produit de deux matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux > 0 est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0, essayer un calcul avec des coefficients génériques.
- Le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale, en effet si $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire ${}^tAA = I_n$ et ${}^tBB = I_n$, alors

$${}^t(AB)AB = {}^tB{}^tAAB = {}^tBI_nB = {}^tBB = I_n.$$

Donc de la décomposition (1), on en déduit que

$$Q_2^{-1}Q_1 = R_2 R_1^{-1}$$

est à la fois une matrice orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0. On vérifie nécessairement qu'une telle matrice est nécéssairement I_n. En effet, pour qu'une matrice

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

soit orthogonale, l'orthogonalité entre les colonnes C_1 et C_2 implique forcément que $a_{1,2} = 0$, et ainsi de proche en proche on montre que tous les coefficients au dessus de la diagonale sont nécéssairement 0. Pour les coefficients diagonaux, le fait que les vecteurs colonnes soient de norme 1 implique que les $a_{i,i}$ sont forcément $+1$ ou -1, mais puisque les coefficients diagonaux sont strictement positifs, ils valent tous $+1$ et donc on a la matrice I_n.
D'où finalement

$$Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1} = I_n \Rightarrow Q_1 = Q_2 \text{ et } R_1 = R_2.$$