## Correction du devoir Maison 1

### Exercice 1. Polynômes de Tchebychev

**Ennoncé :** *On définit une suite de polynômes par une relation de recurrence double :*

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X),\ T_0 = 1,\ T_1 = X$$

1. *Montrer que pour $n \geq 1$, le polynôme $T_n$ est de degré $n$, de coéfficient dominant $2^{n-1}$.*
2. *Établir que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n$ on a*
$$T_n(\cos t) = \cos(nt). \tag{1}$$
3. *On munit l'espace $\mathbb{R}_k[X]$ de polynômes réels de degré inferieur à $k$ de la forme bilinéaire*
$$\beta(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(X)\cdot Q(X)}{\sqrt{1-X^2}} dX \tag{2}$$
*Montrer que l'on definit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$.*
4. *Montrer que les polynômes $T_n, T_m$ sont bien orthogonaux pour $n \neq m$.*
*Indication. Pour le calcul de l'intégrale, on utilisera la substitution $X = \cos t$.*
5. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\widetilde{T}_n = \alpha_n T_n$, où $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Calculer le coefficient $\alpha_n$ tel que la norme associée au produit scalaire (2) de $\widetilde{T}_n$ est égal à 1.*

**Corrigé :**

1. Soit $H_n$, $n \geq 1$, l'hypothèse de récurrence: le polynôme $T_n$ est de degré $n$, de coéfficient dominant $2^{n-1}$. On constate que $H_1$ est vraie. Si $H_n$ est vraie, alors $2XT_n$ est de degré $n+1$ et de coefficient dominant $2^n$, et $T_{n-1}(X)$ est de degré $n-1$. Il en résulte que le polynôme $T_{n+1}$ est de degré $n+1$, de coéfficient dominant $2^n$, ce qui prouve notre récurrence.

2. Montrons par récurrence que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.

   La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons la vraie jusqu'à l'ordre $n$. Alors,
$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 2\cos(t)T_n\big(\cos(t)\big) - T_{n-1}\big(\cos(t)\big) = 2\cos(t)\cos(nt) - \cos\big((n-1)t\big) \\ &= 2\frac{\cos(t+nt)+\cos(t-nt)}{2} - \cos\big((n-1)t\big) = \cos\big((n+1)t\big). \end{aligned}$$

3. Dans l'intégrale qui calcule $\langle P, Q\rangle$, la fonction $f(t) := \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ que l'on intègre n'est pas définie en ses bornes. Regardons ce qui se passe en 1, l'étude en $-1$ étant analogue.

   Si $P(1)$ ou $Q(1)$ est nul, on peut la prolonger par continuité en 1 par $f(0) = 0$. Sinon, elle est équivalente en $1^-$ à $\frac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$. On en déduit que l'intégrale converge.

   De plus, si $P = Q$ est non nul, $f$ étant continue, positive, et non nulle sur $]-1,1[$, on déduit $\langle P, P\rangle > 0$. La forme étant clairement bilinéaire, c'est un produit scalaire.

4. On calcule dans un premier temps le produit scalaire $\langle T_n, T_m\rangle$. À l'aide du changement de variables $t = \cos(\theta)$ pour $\theta$ entre 0 et $\pi$ (ce qui assure $\sin(\theta) \geq 0$), il vient:
$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{0} \frac{T_n\big(\cos(\theta)\big)T_m\big(\cos(\theta)\big)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)}{\sin(\theta)}\sin(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \big(\cos\big((n+m)\theta\big) + \cos\big((n-m)\theta\big)\big)\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

   Comme $n \neq m$, alors
$$\langle T_n, T_m\rangle = \frac{1}{2(n+m)}\big[\sin\big((n+m)\theta\big)\big]_0^{\pi} + \frac{1}{2(n-m)}\big[\sin\big((n-m)\theta\big)\big]_0^{\pi} = 0$$

5. On reprend la formule ci-dessus avec $n = m$. On obtient
$$\langle T_n, T_n\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\cos(2n\theta) + 1\big)\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } 1 \leq n. \end{cases}$$
Donc,
$$\alpha_n = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{1}{\pi}} & \text{si } n = 0, \\ \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{si } 1 \leq n. \end{cases}$$

**Exercice 2. Cauchy-Schwarz subservif**

**Ennoncé :** *Soient $u, u'$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ à coordonnées $(x, y)$ et $(x', y')$ dans la base canonique $\{e, f\}$.*

*On considère une forme bilinéaire $\langle u, u'\rangle = xx' - yy'$ (on la note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pour simplifier les notations. Bien sûr, ce n'est pas un produit scalaire).*

1. *Écrire la matrice de cette forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans la base $\{e, f\}$.*
2. *Montrer qu'en effet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ n'est pas un produit scalaire. Quelles propriètés du produit scalaire ne sont pas satisfaites ?*
3. *On considère une autre base de $\mathbb{R}^2$ formée par des vecteurs $g$ et $h$ aux coordonnées $(1, 1)$ et $(1, -1)$ Quelle est la matrice de la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans la base $\{g, h\}$?*
4. *Montrer que $\langle u, u'\rangle^2 \;\geq\; \langle u, u\rangle \cdot \langle u', u'\rangle$.*
5. *Quelle est la condition sur $u$ et $u'$ pour que $\langle u, u'\rangle^2 = \langle u, u\rangle \cdot \langle u', u'\rangle$.*

**Corrigé :**

1. Comme $E$ et $F$ s'écrivent respectivement $(1, 0)$ et $(0, 1)$, il vient que
$$\langle E, E\rangle = 1,\ \langle E, F\rangle = \langle F, E\rangle = 0,\ \langle F, F\rangle = -1.$$
La matrice cherchée est donc
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
2. Entre autres, $(F, F) < 0$ prouve que l'on n'est pas en présence d'un produit scalaire.
3. La matrice de passage $P$ de la base $\{E, F\}$ vers la base $\{G, H\}$ est donnée par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Par la formule de changement de base, la matrice de la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans la base $\{G, H\}$ est donnée par
$$B = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
4. On n'a que l'embarras du choix!
Si on travaille dans la base $(E, F)$, on écrit: $u = xE + yF$, $u' = x'E + y'F$, et donc
$$\langle u, u\rangle = x^2 - y^2,\ \langle u, u'\rangle = xx' - yy', \langle u', u'\rangle = x'^2 - y'^2.$$
Il faut donc montrer $(xx' - yy')^2 \geq (x^2 - y^2)(x'^2 - y'^2)$.
Cette inégalité n'est pas difficile à prouver par un "développé-groupé-factorisé", mais, si l'on travaille dans la base $(G, H)$, on écrit: $u = xG + yH$, $u' = x'G + y'H$, et donc, par la question précédente,
$$\langle u, u\rangle = 4xy,\ \langle u, u'\rangle = 2(xy' + x'y), \langle u', u'\rangle = 4x'y'.$$
Il faut donc montrer $4(xy' + x'y)^2 \geq 16xyx'y'$.
Cette dernière formule semble plus simple à manier. En simplifiant par 4 et en développant, on voit qu'elle est équivalente à $x^2y'^2 + 2xx'yy' + x'^2y^2 \geq 4xx'yy'$ et donc $(xy' - x'y)^2 \geq 0$, ce qui est toujours vrai.
5. Le cas d'égalité correspond à $(xy' - x'y)^2 = 0$, et donc $xy' - x'y = 0$ et il vient
$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0,$$
c'est-à-dire si et seulement si $u$ et $u'$ sont colinéaires (c'est le seul point commun avec le vrai Cauchy-Schwarz!).