Algebre - IV - Cours 1

Chap. I. Formes Bilinéaires

1.1 Définitions

Une fonction de deux copies d'un esp. vect V à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une forme bilinéare si

pour $\forall\, x, y \in V$: si on fixe y alors c'est <u>linéaire</u> en x <u>et</u> si on fixe x c'est <u>linéaire</u> en y :

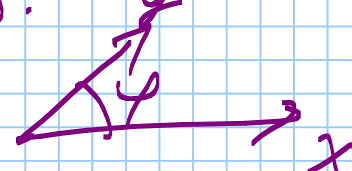
$B : V \otimes V \to \mathbb{R}$

$$B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)$$
$$B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

<u>et</u>

$$B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2)$$
$$B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y)$$

En géométrie - exemple d'une forme bilinéaire - c'est le produit scalaire de deux vecteurs :



<u>Ex1.</u> $\langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cos\varphi$

$\lambda > 0$: $\langle \lambda x, y \rangle = |\lambda x| \cdot |y| \cos\varphi = \lambda |x| \cdot |y| \cos\varphi$

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

Ex 2 $V = \mathbb{R}^2$ $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$B(x,y) = a_1 b_2 + 3 a_2 b_2$$

Ex 3 $V = \mathbb{R}^2$ $\tilde{B}(x,y) = \text{dét}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

$$= a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Ex 4 V – esp. fonctions intégrables sur $[a,b]$

$$B(f,g) = \int_a^b f \cdot g \, dx$$

Rq. symétrique $B(f,g) = B(g,f)$

$$B(f_1 + f_2, g) = \int_a^b (f_1 + f_2) g \, dx = \int_a^b f_1 g \, dx + \int_a^b f_2 g \, dx$$

$$= B(f_1, g) + B(f_2, g)$$

$$B(\lambda f, g) = \lambda B(f,g)$$

Rq. Formes bilinéaires sur V forment elles-mêmes un vectoriel : on peut ajouter les formes bilin. et les multiplier par un nombre : $B_1 + B_2$ et $\lambda \cdot B$ sont aussi des formes bilinéaires sur V

Ex 2 et 3 $B(x,y) + \tilde{B}(x,y)$

$$= a_1 b_2 + 3 a_2 b_2 + a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$= 2 a_1 b_2 + 3 a_2 b_2 - a_2 b_1$$

Comment décrire les formes bilinéaires

sur V - un esp. vect.

1.2 La matrice d'une forme bilin.

sur V - un esp. vect. de dim fini.

Si on fixe une base de V il suffit de définir la forme bilin. sur tout couple de vecteurs de base de V

Soit $\{e_1, \dots e_n\}$ - une base de V

$$\begin{matrix} B(e_1,e_1) & B(e_1,e_2) & \dots & B(e_1,e_n) \\ B(e_2,e_1) & B(e_2,e_2) & \dots & B(e_2,e_n) \\ \dots & & & \dots \\ B(e_n,e_1) & \dots & & B(e_n,e_n) \end{matrix}$$

$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$, $y = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n$

$$B(x,y) = B(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, y)$$

$$= a_1 B(e_1, y) + a_2 B(e_2, y) + \dots + a_n B(e_n, y)$$

$$= a_1 B(e_1, b_1 e_1 + \underline{b_2 e_2} + \dots + b_n e_n)$$
$$+ a_2 B(e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n)$$
$$+ a_n B(e_n, b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n)$$

$$= a_1 b_1 B(e_1,e_1) + a_1 b_2 B(e_1,e_2) + \dots + a_1 b_n B(e_1,e_n)$$
$$+ a_2 b_1 B(e_2,e_1) + a_2 b_2 B(e_2,e_2) + \dots + a_2 b_n B(e_2,e_n)$$
$$+ a_n b_1 B(e_n,e_1) + a_n b_2 B(e_n,e_2) + \dots + a_n b_n B(e_n,e_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_1,e_2) & \dots & B(e_1,e_n) \\ B(e_2,e_1) & B(e_2,e_2) & \dots & B(e_2,e_n) \\ \cdot & - & - & - \\ B(e_n,e_1) & \dots & & B(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

$$B(x,y) = (a_1, \dots, a_n)\, A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = {}^t x A y$$

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \boxed{B(x,y) = {}^t x A y}$$

<u>Ex 2</u> $B(x,y) = \underline{a_1 b_2 + 3 a_2 b_2}$

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$B(x,y) = (a_1 \;\; a_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_1,e_2) \\ B(e_2,e_1) & B(e_2,e_2) \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B(e_1,e_1) = B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$B(e_2,e_1) = B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 0$$

$$B(e_1,e_2) = B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 1 = 1$$

$$B(e_2,e_2) = B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$$

Ex 3 $B(x,y) = \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

$$= (a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 1 $B(x,y) = a_1 b_1 + a_2 b_2$ - produit sc. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Matrice d'une forme bilinéaire sous un changement de base

Rappel Matrice de passage

Soit $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ une base de V ($V = \mathbb{R}^2$). Soit $\{\vec{f}, \vec{g}\}$ une autre base de V.

Soit $\vec{f} = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2$
$\vec{g} = g_1 \vec{e}_1 + g_2 \vec{e}_2$, $(\vec{f} \ \vec{g}) = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2) \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}$

On appele $P = \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage

Tout vecteur $\vec{V} = v_1 \vec{f} + v_2 \vec{g} = (\vec{f} \ \vec{g}) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$= v_1 (f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2) + v_2 (g_1 \vec{e}_1 + g_2 \vec{e}_2)$$

$$= \underline{(v_1 f_1 + v_2 g_1)} \vec{e}_1 + \underline{(v_1 f_2 + v_2 g_2)} \vec{e}_2$$

$$\vec{V} = (\vec{f} \ \vec{g}) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2) \boxed{\begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow \{\vec{f}, \vec{g}\}$

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ - les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{f}, \vec{g}\}$

devient $P \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ - coords. de $\vec{v}$ dans la base $\{e_1, e_2\}$

P - la matrice de passage.

Soit A - la matrice de la forme bilinéaire $B(x, y)$ dans une base $\{e_1, \dots e_n\}$. Soit $\{h_1, \dots h_n\}$ une autre base. Donc si V a pour coordonnées $(v_1, \dots v_n)$ dans la base $\{h_1, \dots h_n\}$ alors ces coordonnées dans la base $\{e_1 \dots e_n\}$ sont $P \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Soit $x = x_1 h_1 + \dots + x_n h_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans la base $\{h_1 \dots h_n\}$

$P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans la base $\{e_1 \dots e_n\}$

P - la matrice de passage.

Soit $B(x,y) = {}^T\left[P\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right] A \left(P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)$

A - matrice de B dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$

? Quelle est la matrice de la forme bilin. B dans la base $(h_1, \dots h_n)$

$$B(x,y) = \underbrace{(x_1 \dots x_n)}_{\text{coord de } x \text{ en } \{h_1 \dots h_n\}} \underbrace{{}^TPAP}_{} \underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}}_{\text{coord de } y \text{ en } \{h_1 \dots h_n\}}$$

${}^T(MN) = {}^TN\,{}^TM$

${}^TPAP$ - est la matrice de la forme bilinéaire $B(x,y)$ dans la base $(h_1, \dots h_n)$ où A - est la matrice de B dans la base $\{e_1 \dots e_n\}$ et P - la matrice de passage de la base $\{h_1, \dots h_n\}$ vers $\{e_1 \dots e_n\}$.

<u>Exemple</u> $B(x,y) = a_1 b_2 + 3 a_2 b_2$

$x = \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$ dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

Soit $h_1 = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$ et $h_2 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ Rq. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} e_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} = h_1$

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = h_2$$

$$A = \begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}, \quad {}^tPAP = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\-1&0\end{pmatrix}$$

1.4. Formes bilinéaires symétriques

$B(x,y) = B(y,x)$ - symétrique

Exemples $B(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = B(y,x)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B'(x,y) = 2x_1 y_1 + 3 x_2 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2$

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Matrices des formes bilinéaires symétriques sont aussi symétrique $A = {}^T A$

Une forme bilinéaire B est anti-symétrique si $B(x,y) = -B(y,x)$.

ses matrices $A = -{}^t A$

Rq. $B(x,x) = -B(x,x) = 0$

$\Rightarrow$ sur la diagonale de A on a que des 0.

Proposition Toute forme bilinéaire se décompose en somme d'une forme symétrique et une forme antisymétrique :

$$B(x,y) = \underbrace{\frac{B(x,y) + B(y,x)}{2}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{B(x,y) - B(y,x)}{2}}_{\text{anti-symétrique}}$$

1.5 Produit scalaire

Soit E un esp. vect. réel

$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ – une forme bilinéaire
$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$

$\forall x, y \in E$

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ – symétrique
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ – positive
- $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ – définie

Rq. si φ – symétrique et linéaire à gauche alors φ est linéaire à droite

Terminologie Esp. vect. réel avec un produit scalaire = préhilbertien réel

Esp. v. réel de dim finie + produit scalaire = Esp. euclidien

Notation $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $(\cdot | \cdot)$, ...

1.6. Exemples des produits scalaires

Sur $\mathbb{R}^n$

1) Produit scalaire usuel :

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

2) Soient $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ alors

$$\langle x, y\rangle = \alpha_1x_1y_1 + \alpha_2x_2y_2 + \dots + \alpha_nx_ny_n \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Sur $E = \mathcal{C}([0,1])$

- $(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$
- $(f,g) \longmapsto \int_0^1 f.g.\rho\, dt$

ρ - fnt continue à valeurs positives s'annulant à un nombre fini de points

Sur $E = \mathbb{R}_n[X] = \{P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 \mid x \in \mathbb{R}\}$

- $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ\,dx$

- $\langle P, Q\rangle = \int_{230}^{3642} P.Q\,dx$

- $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)\,Q(k)$

Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ – matrices $n \times n$

$A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij}$

$\langle A, B\rangle = \sum a_{ij}b_{ij} = tr\, {}^tAB$ (vérifier!)

1.7. Formes quadratiques

Soit une forme bilinéaire $B(x,y)$ symétrique

$Q(x) := B(x,x)$ est une forme quadratique correspondante à la forme bilin. symétrique B.

$Q(x)$ – n'est plus linéaire !

Exemple : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2$

$Q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$

si la matrice de B est $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

pour B symétrique $a_{12} = a_{21}$

$$B(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\quad Q(x) = B(x,x) = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2$

On peut reconstituer la forme bilinéaire symétrique à partir d'une forme quadratique correspondante

En effet :

$$Q(x+y) = B(x+y, x+y)$$
$$= \underline{B(x,x)} + 2\,B(x,y) + B(y,y) \qquad (*)$$
$$B(x,y) + B(y,x) = 2B(x,y)$$

$((a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$

$B(x,x) = Q(x)$, $B(y,y) = Q(y)$

$$Q(x-y) = B(x-y, x-y)$$
$$= B(x,x) - 2B(x,y) + B(y,y)$$

$$Q(x+y) - Q(x-y) = 4B(x,y)$$

$$\Rightarrow \boxed{B(x,y) = \frac{Q(x+y) - Q(x-y)}{4}}$$

ou bien

$$\boxed{B(x,y) = \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}}$$

Matrice d'une forme bilin. symétrique est appelé parfois matrice d'une forme quadratique.

1.8. <u>Norme associée à un produit scalaire</u>

<u>Déf</u>
<u>Une</u> norme sur un esp. vect E est une application
$N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

- $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ homogénéité
- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ - inégalité triangulaire

<u>Prop</u> $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire sur E alors $x \longmapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définie une norme. On dit que cette norme est une norme euclidienne

<u>Rq.</u> Il existent des normes

non-euclidienne.

Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

sur $\mathcal{C}([0,1])$, $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} f(x)$

Formes bilinéaire symétrique $\longleftrightarrow$ Formes quadratiques

Produit scalaire $\longrightarrow$ Normes

1.9 Inégalité Cauchy-Schwarz

Proposition Soit $\langle \cdot , \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique sur un esp. vect E

- si $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est positive $(\forall x, \langle x, x\rangle \geq 0)$

alors $\forall\, x, y \in E$

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

- si de plus $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est définie

$$(\langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0)$$

(i.e. $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire)

alors on a $\langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$
(pour x, y non-nuls)
ssi x et y sont liées
(il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $x = \lambda y$)

Démo : On étudie $\lambda \longmapsto \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle$

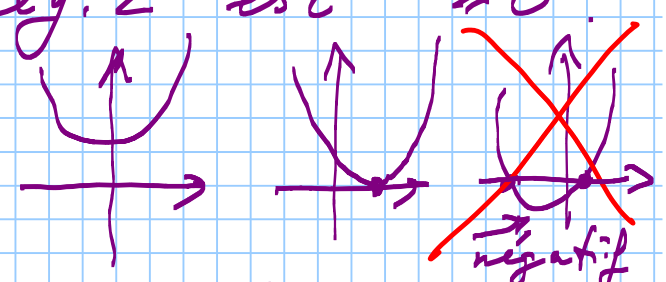
$\langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle \geq 0$ - car $\langle \cdot , \cdot \rangle$ supposée positive

$$= \lambda^2 \langle x, x\rangle + 2\lambda \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \geq 0$$

un polynôme de dég. 2 est ≥ 0 ?

$$a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$



$b = 2\langle x, y\rangle$, $a = \langle x, x\rangle$, $c = \langle y, y\rangle$

$$\Delta = \left(2\langle x,y\rangle\right)^2 - 4\,\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle \leq 0$$

$$4\left(\langle x,y\rangle\right)^2 \leq 4\,\langle x,x\rangle\,\langle y,y\rangle$$

$$\boxed{\left|\langle x,y\rangle\right|^2 \leq \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle}$$

à finir dans le cas défini :

$$\langle x,y\rangle^2 = \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle \iff x, y \text{ sont colinéaire}$$

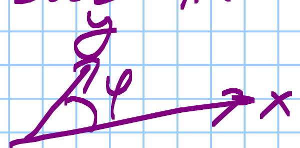
<u>Exemples</u> Pour $\mathbb{R}^n$, un produit scalaire standard

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\left(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n\right)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + \dots + y_n^2\right)$$

$$\boxed{\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\cdot\|y\|^2}$$

Sur $\mathbb{R}^2$ $\quad \left(|x|\cdot|y|\cdot\cos\varphi\right)^2 \leq |x|^2\cdot|y|^2$



$$|x|^2\cdot|y|^2\cos^2\varphi \leq |x|^2\cdot|y|^2$$

Sur $\mathcal{L}_2[0,1]$

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right|^2 \leq \int_0^1 |f(x)|^2\,dx \cdot \int_0^1 |g(x)|^2\, x$$

1.10. Cas complexe E - $\mathbb{C}$-e.v.

On essaye de définir $\langle \cdot , \cdot \rangle$ sym. définie positive

$\forall x$, si $x \neq 0$ $\underline{\langle x, x \rangle > 0}$ mais aussi

$\langle ix, ix \rangle > 0$ On remarque que

$$\langle ix, ix \rangle = i \cdot i \langle x, x \rangle = \underline{-\langle x, x \rangle > 0}$$

contradiction

On remplace "symétrique" ⇝ "hermitien"

"bilinéaire" ⟶ "sesquilinéaire"

Déf Produit scalaire sur un esp. vect. complexe E est une application

$E \times E \to \mathbb{C}$ • $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

- linéaire à droite
- semi-linéaire à gauche

} sesqui-linéaire

$\langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$

- défini-positif.

Exemple: sur $\mathbb{C}^n$ $\langle x, y \rangle = {}^t\overline{x} \cdot y$, où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$= \overline{x}_1 y_1 + \dots + \overline{x}_n y_n$$

Norme associée :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

- $N(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$
- $N(\lambda x) = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle}$

$= \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle x,x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|$

- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

On remarque

$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$

$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle$

$z = a+ib$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ $\quad z+\bar{z} = 2a = 2\operatorname{Re} z$

$\bar{z} = a-ib$

$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\cdot\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$

Normes associées à un produit scalaire

Comparatif

$\mathbb{R}$ (produit euclidien)	$\mathbb{C}$ (produit hermitien)
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$	$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$
$\|\alpha x\|^2 = \|\alpha\|^2\|x\|^2$	$\|\lambda x\| = \lambda\bar{\lambda}\|x\|^2 = \|\lambda\|^2\|x\|^2$
$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$	$\operatorname{Re}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$
	$\operatorname{Im}\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$

Rq. Inégalité Cauchy-Schwarz - même énoncé en $\mathbb{R}$ et en $\mathbb{C}$.