Algèbre IV. Chapitre 2. Orthogonalité

2.1 Vecteurs et sous-espaces orthogonaux.

E - e.v. réel avec un produit scalaire
(complexe — " — hermitien)

Déf - $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$. on note $x \perp y$.

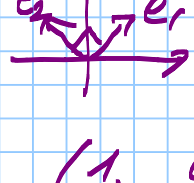
(Rq. pour un e.v. complexe $\langle x,y\rangle = 0$ implique $\langle y, x\rangle = 0$)

- F_1, F_2 - ssesp. vect. de E sont orthogonaux si $\forall x \in F_1$, $\forall y \in F_2$ on a $\langle x, y\rangle = 0$. On note $F_1 \perp F_2$

- On dit qu'une famille de vecteurs $\{y_1, \dots y_n\}$ est orthogonale si $\langle y_i, y_j\rangle = 0$ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]$ et $i \neq j$

- Si de plus on a $\|y_i\| = 1$ $\forall i$ on dit que $\{y_1, \dots y_n\}$ est une famille orthonormée.

Exemple: - base canonique de $\mathbb{R}^n$

- 

$\{e_1, e_2\}$ $\langle e_1, e_2\rangle = 0$
et $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = 1$

- $(1, \cos nx, \sin nx)_{n\geq 1}$ pour $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} fg\, dt$ et ⁓ famille orthogonale

$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)_{n\geq 1}$ - famille orthonormée

Pour $\forall$ esp. vect. de dim >0 il existe une base orthonormée

Prop. Soit $\{u_1, \dots, u_m\}$ une famille de vecteurs non-nuls deux-à-deux orthogonaux; alors cette famille est libre.

Démo Il faut m.q. si

$$c_1 u_1 + \dots + c_m u_m = 0 \quad \text{alors } c_1 = \dots = c_m = 0$$

On a $\langle 0, u_1 \rangle = \langle c_1 u_1 + \dots + c_m u_m, u_1 \rangle$

$= c_1 \langle u_1, u_1 \rangle$

$\Leftrightarrow 0 = c_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{\neq 0 \text{ car } u_1 \neq 0} \Rightarrow c_1 = 0$

En regardant le produit scalaire de $c_1 u_1 + \dots + c_m u_m$ avec u_i on a $c_i = 0 \ \forall i$. alors la famille est libre.

Propriétés Soient

$F_1 = \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_k)$, $F_2 = \mathrm{Vect}(y_1 \dots y_l)$

alors $F_1 \perp F_2 \Leftrightarrow x_i \perp y_j \quad \forall (i,j) \in [\![1,k]\!] \times [\![1,l]\!]$

$F_1 \perp F_2 \Rightarrow F_1 \cap F_2 = \{0\}$

Déf $x \in E$, $x^{\perp} := \{y \in F \mid \langle x, y \rangle = 0\}$

Rq $X \perp X^{\perp}$

Prop F, G — ssesp. vect. de E

1. $X^{\perp}$ — est un ssev. de E
2. $\{0\}^{\perp} = E$, $E^{\perp} = \{0\}$
3. $F \subseteq G$, $G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$
4. $X^{\perp} = (\mathrm{Vect}\, X)^{\perp}$ et plus généralement $F^{\perp} = (\mathrm{Vect} F)^{\perp}$
5. $F^{\perp} \cap G^{\perp} = (F+G)^{\perp}$
6. $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$
7. $F^{\perp} + G^{\perp} \subseteq (F \cap G)^{\perp}$

$\left.\begin{array}{l} 6. \\ 7. \end{array}\right\}$ des égalités si $\dim E < \infty$

Rq Produit scalaire défini la notion d'orthogonalité.

2.2. Théorème de Pythagore

$(E, \langle , \rangle)$ $e_1, \dots, e_k \in E$

Prop. 1) $e_1 \perp e_2 \iff \|e_1 + e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$

2) Si la famille $\{e_1, \dots e_k\}$ est orthogonale alors

$$\|e_1 + \dots + e_k\|^2 = \|e_1\|^2 + \dots + \|e_k\|^2$$

3) Si $x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i$ $\{e_1, \dots e_k\}$ est orthogonale

$y = \sum_{i=1}^{k} y_i e_i$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{k} \overline{x_i}\, y_i \, \|e_i\|^2$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 \, \|e_i\|^2$$

(pour E-réel $|x_i|^2 = x_i^2$
E complexe : $|x_i|^2 = \overline{x_i}\, x_i$)

$$\langle x, e_j\rangle = x_j \cdot 1 \, \|e_j\|^2$$

$$x_j = \frac{\langle x, e_j\rangle}{\langle e_j, e_j\rangle}$$

(dans une base orthogonale $\{e_1, \dots e_k\}$)

Dans une base orthonormée

on a $$x = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, x\rangle e_i$$

$x_i = \langle e_i, x\rangle$

(car $\langle e_i, e_i\rangle = 1$
$\langle e_i, e_j\rangle = 0$ si $i \neq j$)

La norme de x :

$$\|x\|^2 = \Big\|\sum_{i=1}^{k} x_i e_i\Big\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\langle e_i, x\rangle|^2$$

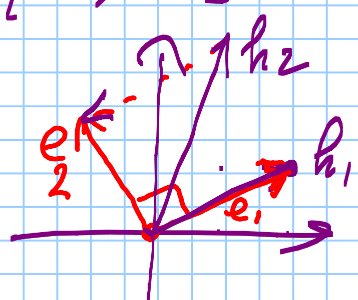
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{k} \overline{x_i}\, y_i = \sum \overline{\langle e_i, x_i\rangle} \langle e_i, y\rangle$$

$$= \sum \langle x_i, e_i\rangle \langle e_i, y\rangle$$

2.3. Orthogonalisation : Procédé Gram-Schmidt.

Exemple 1 . $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

On construit une base orthogonale $\{e_1, e_2\}$ de l'espace engendré par $\{h_1, h_2\}$ on demande que $e_1 = h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



on cherche e_2 t.q. $e_2 \perp e_1$

$$e_2 = h_2 + \lambda \cdot e_1$$

$$\text{t.q. } \langle e_2, e_1 \rangle = 0$$

$$\langle h_2 + \lambda e_1, e_1 \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle h_2, e_1 \rangle + \lambda \langle e_1, e_1 \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{\langle h_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \Rightarrow e_2 = h_2 - \frac{\langle h_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{5}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (e_1, e_2) \overset{\text{normalisér}}{\rightsquigarrow} (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$$

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow \|e_1\| = \sqrt{5}$$

$$\langle e_2, e_2 \rangle = (-1)^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow \|e_2\| = \sqrt{5}$$

$$\tilde{e}_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ - une base orthonormée.

Procédé Gram-Schmidt en dim m.

Soit $F = \text{Vect}\{f_1, \dots f_m\}$ où $f_1, \dots f_m$ est une famille libre.

Construction d'une base orthogonale $\{e_1, \dots e_m\}$ $(\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j)$:

- On pose $\boxed{e_1 = f_1}$

- On pose $e_2 = f_2 + \lambda_1 e_1$ on cherche λ_1 t.q. $\langle e_2, e_1 \rangle = 0 \iff \langle f_2 + \lambda_1 e_1, e_1 \rangle = 0$

$\iff \langle f_2, e_1 \rangle + \lambda_1 \langle e_1, e_1 \rangle = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -\dfrac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle}$ et on a $\boxed{e_2 = f_2 - \dfrac{\langle f_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1}$

- On pose $e_3 = f_3 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$

On cherche μ_1, μ_2 t.q.

$\langle e_3, e_1 \rangle = 0$ (1) et $\langle e_3, e_2 \rangle = 0$ (2)

(1) $\iff \langle f_3 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2, e_1 \rangle = 0$

$\iff \langle f_3, e_1 \rangle + \mu_1 \langle e_1, e_1 \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \mu_1 = -\dfrac{\langle f_3, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle}$

$(2) \Leftrightarrow \langle f_3 + \mu_1 \overbrace{e_1 + \mu_2 e_2, e_2}^{0}\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle f_3, e_2\rangle + \mu_2 \langle e_2, e_2\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \mu_2 = -\dfrac{\langle f_3, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle}$

$$\boxed{e_3 = f_3 - \frac{\langle f_3, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 - \frac{\langle f_3, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2}$$

et ainsi de suite on a

$$\boxed{e_k = f_k - \frac{\langle f_k, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 - \dots - \frac{\langle f_k, e_{k-1}\rangle}{\langle e_{k-1}, e_{k-1}\rangle} e_{k-1}}$$

<u>Rq.</u> $\{e_1, \dots, e_m\}$ construit ainsi est une base de F

(par la prop. démontrée : Toute famille orthogonale est libre).

<u>Exemple 2</u> $E = \mathbb{R}^3$, produit sc. usuel

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$

Gram-Schidt : $e_1 = v_1$

$e_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} - \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \qquad e_1 \perp e_2$$

Completer $\{e_1, e_2\}$ par un vecteur e_3 t.q. $e_1 \perp e_3$ et $e_2 \perp e_3$

On cherche un vecteur qui n'est pas dans F et on procède par Gram-Schmidt : $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F$

(evident car $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

implique $\begin{array}{l} 1 = a + b \\ 0 = a \\ 0 = b\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$ or pas de a et b existent.)

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\langle v, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 - \frac{\langle v, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{1/4 + 1/4 + \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1/2 - 1/4 \\ -1/2 + 1/4 \\ -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$$

Si on veut une base orthonormée :

$e_1 \rightsquigarrow \frac{e_1}{\|e_1\|}$, $e_2 \rightsquigarrow \frac{e_2}{\|e_2\|}$, $e_3 \rightsquigarrow \frac{e_3}{\|e_3\|}$

<u>Exemple 3</u> Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ polynôme de dég ≤ 2 ax^2+bx+c

Produit scalaire $\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt = \langle P, Q\rangle$

$\{1, t, t^2\}$ - défini une base de E

Orthogonalisation :

$\boxed{e_1 = 1}$, $e_2 = t + \lambda \cdot 1$

$e_2 = t - \frac{\langle t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 = t$ $\boxed{e_2 = t}$

$\langle t, 1\rangle = \int_{-1}^{1} t \cdot 1\, dt = 0$

$e_3 = t^2 - \frac{\langle t^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 - \frac{\langle t^2, t\rangle}{\langle t, t\rangle} t$

$\langle t^2, 1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

$\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dt = [t]_{-1}^{1} = 2$

$\langle t^2, t\rangle = \int_{-1}^{1} t^2 \cdot t\, dt = 0$

$\boxed{e_3 = t^2 - \frac{1}{3}}$ Base orthogonale $\{1, t, t^2 - \frac{1}{3}\}$

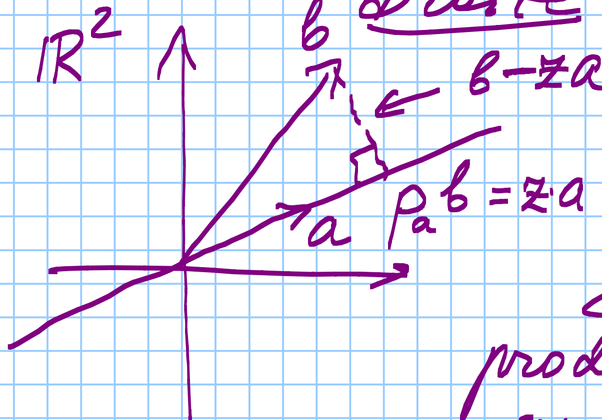
Ex 4 Polynômes de Legendre - base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$
base $\{1, t, \dots t^n\}$ par le procédé

de Gram-Schmidt

$$\{1,\ t,\ t^2-\tfrac{1}{3},\ t^3-\tfrac{3}{5}t,\ \dots,\ t^n - \dots\}$$
$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \dots$$

Formule générale $\dfrac{1}{2^k\cdot k!}\,\dfrac{d^k(t^2-1)^k}{dt^k}$ $(=e_k)$

2.4. Projection orthogonale sur une droite



z - est un nombre

$b - za \perp a$

$\iff \langle b-za, a\rangle = \langle a, b-za\rangle = 0$

produit scalaire usuel $\langle x, y\rangle = {}^Tx\cdot y$

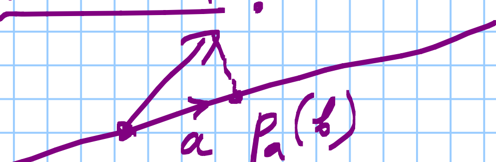
$$\langle a, b-za\rangle = {}^Ta\cdot(b-za) = 0$$

$$z = \frac{{}^Ta\cdot b}{{}^Ta\cdot a}$$

Déf/prop. La projection orthogonale de b sur la droite porté par a est

$$\boxed{P_a(b) = z\cdot a \quad \text{avec} \quad z = \frac{{}^Ta\cdot b}{{}^Ta\cdot a}}$$

Dans $\mathbb{R}^n$:



$$P_a(b) = \underbrace{\frac{{}^Ta\cdot b}{{}^Ta\cdot a}}_{\in\mathbb{R}}\cdot a = a\cdot\frac{{}^Ta\cdot b}{{}^Ta\cdot a} = \underbrace{\frac{a\,{}^Ta}{{}^Ta\cdot a}}_{P}\, b$$

associativité de produit de mat

P - la matrice de projection

$$P = \frac{a\cdot{}^Ta}{{}^Ta\cdot a} \qquad {}^Ta\cdot a \in \mathbb{R}$$

matrice $n \times n$

P - matrice de projection sur la droite portée par a.

Exemple Soit $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrice de projection sur la droite portée par a

$$P = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1\,1\,1)}{(1\,1\,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Projection du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur la droite portée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Rqs : * $\operatorname{Im} P = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

* $\operatorname{Ker} P$ = plan perpendiculaire à a

Par exemple $\operatorname{Ker} P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

* $\operatorname{Rg} P = 1$

* $P^2 = P$

* P est symétrique $P = {}^tP$

Dans notre exemple

un autre $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$P = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} (2\,2\,2) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5. Projection orthogonale.

Déf Soit F un sous-esp. de E

On dit que un vecteur v est orthog. à F si v est orthog. à tout vect. de F.

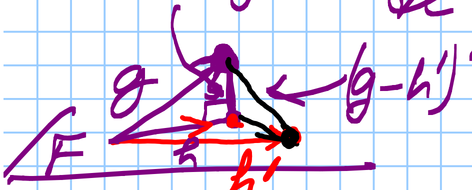
Rq si v est orthog à $f_1, \dots, f_m$ alors alors v est orthog. à $c_1 f_1 + \dots + c_m f_m$ $\forall c_i \in \mathbb{R}$.

Soit $g \in E$, $g \notin F$. On peut presenter $g = h + v$ t.q. $h \in F$ et $v \perp F$. h - est la projection orthogonale de g sur F.

Cette decomposition $h + v$ existe et elle est unique.

$\|v\|$ - la distance la plus courte le point d'arrivé de g à F

$v = g - h$



Soit $h' \in F$, t.q. $h' \neq h$

On va m.q. $\|g - h'\| > \|g - h\|$

En effet,
On remarque que $h - h' \in F$
donc $h - h' \perp v$

Pythagore : $\|h - h'\|^2 + \|\underset{v}{g - h}\|^2 = \|g - h'\|^2$

$\|g-h\|^2 < \|g-h'\|^2$

$\Rightarrow \|g - h'\| > \|g - h\|$

En pratique ? Comment trouver la projection orthogonale de g ?

Soit $< f_1, \dots f_m >$ une base de F

On cherche $h = c_1 f_1 + \dots + c_m f_m$

t.q. $< g - h, f_k > = 0 \quad \forall k \in [\![1, m]\!]$

$<h, f_k> = <g, f_k>$

$< c_1 f_1 + \dots + c_m f_m , f_k > = < g, f_k >$

$(*)_k \quad c_1 < f_1, f_k > + c_2 < f_2, f_k > + \dots + c_m < f_m, f_k > = < g, f_k >$

Si $\{f_1, \dots f_m\}$ est orthonormale
on a $c_k = <g, f_k>$ $\quad$ (car $<f_\ell, f_k> = \delta_{\ell k}$)

Dans une base quelconque

il y a $c_1, \dots c_m$ — indéterminées
dans m équations $(*)_k$

il y a une seule solution

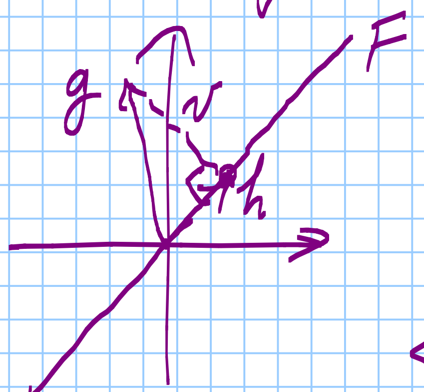
$$\det \begin{pmatrix} \langle f_1,f_1\rangle & \langle f_2,f_1\rangle & \dots & \langle f_m,f_1\rangle \\ \langle f_1,f_2\rangle & \langle f_2,f_2\rangle & \dots & \langle f_m,f_2\rangle \\ \cdot & - & - & - \\ \langle f_1,f_m\rangle & \dots & \dots & \langle f_m,f_m\rangle \end{pmatrix} \neq 0$$

c'est le déterminant de Gram-Schmidt de la famille de vecteurs $\{f_1, \dots f_m\}$

__Exemple__. Projection de $g = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ sur une droite $F = \langle \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \rangle$

On cherche à presenter $g = h + v$

h - projection sur F



$h = c_1 \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $\langle v, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \rangle = 0$

alors

$$\langle g, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \rangle = c_1 \langle \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \rangle$$

$$c_1 = \frac{\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \rangle} = \frac{2}{10}$$

$$h = \frac{2}{10}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.2\\0.6\end{pmatrix}$$

matrice de projection

$$\boxed{P = \frac{a \cdot {}^{T}a}{{}^{T}a \cdot a}}$$

a – vecteur directeur de la droite

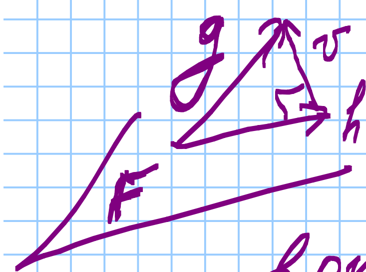
ici : $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$$P = \frac{\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & -3\\-3 & 9\end{pmatrix}$$

$$h = P \cdot g = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & -3\\-3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.2\\0.6\end{pmatrix}$$

Algèbre IV. Chapitre 2. Orthogonalité

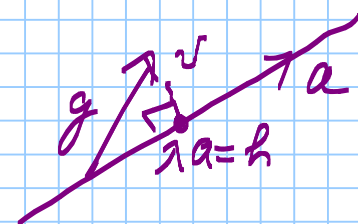
2.6 Matrice de projection orthogonale



$$g = \underset{\substack{\cap \\ F}}{h} + \underset{\substack{\cap \\ F^\perp}}{v} \qquad F \subset E$$

b.o.n. et produit scalaire usuel

Si $F = \mathrm{Vect}(a)$



$$h = P \cdot g \qquad \underbrace{P = \frac{a \cdot {}^T a}{{}^T a \cdot a}}$$

$\dim F = 2$ $\qquad F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$

on voudrait $\qquad h = P \cdot g \qquad$ P – matrice agissant sur E

$$g - h \perp F$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g - h \perp f_1 \\ g - h \perp f_2 \end{cases} \qquad h \in F \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \text{ t.q. } h = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$$

$$\begin{cases} {}^T f_1 \cdot (g - h) = 0 \\ {}^T f_2 (g - h) = 0 \end{cases} \qquad \text{Soit } A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ f_1 & f_2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$${}^T A \cdot (g - h) = 0 \qquad h = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow {}^T A \left(g - A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow {}^T A g = {}^T A \cdot A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

${}^tA \cdot A$ matrice 2×2 $({}^tA\cdot A)^{-1}$ existe

Donc $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = ({}^tA\cdot A)^{-1}\,{}^tA\, g$

$$h = A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = \underbrace{A({}^tA\cdot A)^{-1}\,{}^tA}_{P}\, g$$

Si $A = a$ on a ${}^tA\, A = {}^ta\cdot a$ - matrice 1×1 (un nombre)

$$\boxed{P = A({}^tA\, A)^{-1}\,{}^tA}$$

(pour F de dim 1
$A = a$ $\quad P = a\cdot({}^ta\cdot a)^{-1}\,{}^ta$
$P = \dfrac{a\cdot {}^ta}{{}^ta\cdot a}$)

Propriétés de la matrice

1) ${}^tA\cdot A$ - symétrique

2) $\operatorname{Ker}{}^tA\, A = \operatorname{ker} A$ $\quad$ Si $x \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow Ax = 0$

alors $\quad {}^tA\, A\, x = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker}{}^tA A$

Si $x \in \operatorname{Ker}{}^tA\cdot A$ alors ${}^tA\, Ax = 0$

$\Rightarrow {}^tx\cdot{}^tA\, Ax = 0 \Rightarrow \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$

$\Rightarrow x \in \operatorname{Ker} A$.

3) Si les colonnes de A sont linéairement indep^ts : ${}^tA\,A$ - carré
- symétrique
- inversible

Matrice de projection sur un sousespace $F \subset E$ est

$$\boxed{P = A({}^T\!A \cdot A)^{-1}\,{}^T\!A}$$

où A est une matrice formée par les vecteurs de la base de F.

<u>Proposition</u> 1) $P^2 = P$

2) ${}^T P = P$

Inversement toute matrice H t.q. $H^2 = H$ et ${}^T H = H$ représente une projection orthogonale

<u>Preuve</u> 1) $P^2 = A({}^T\!AA)^{-1}\underbrace{\underbrace{{}^T\!A \cdot A}\,({}^T\!AA)^{-1}}_{I}\,{}^T\!A$

$= A({}^T\!AA)^{-1}\,{}^T\!A = P$

2) ${}^T P = {}^T\!\left(A({}^T\!AA)^{-1}\,{}^T\!A\right) = {}^T({}^T\!A)\,\underbrace{{}^T\!\left(({}^T\!A \cdot A)^{-1}\right)}\,{}^T\!A = P$

${}^T(MN) = {}^T N \cdot {}^T M$

${}^T({}^T\!AA) = {}^T\!A\,{}^T({}^T\!A) = {}^T\!A\,A$
(le même pour l'inverse)

Soit $H \in Mat_{n \times n}$ $(\dim E = n)$
$H^2 = H$ et ${}^T H = H$

M.q. $\forall g \in E$ on a Hg est

la projection engendrée par les colonnes de H (on ne suppose pas que $\operatorname{rg} H = n$, du coup l'espace engendré par les colonnes de H est un <u>sous-espace propre</u> de E)

M.q. $g - Hg \perp \operatorname{Vect}(\text{Colonnes}(H))$

$$\operatorname{Vect}(\text{Colonnes } H) = \{ c_1 h_1 + \dots + c_n h_n \,/\, c_1, \dots c_n \in \mathbb{R} \}$$

$$c_1 h_1 + \dots + c_n h_n = (h_1 \dots h_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Donc on veut m.q.

$$g - Hg \perp H \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{c}$$

$$\iff {}^T(g - Hg) \cdot Hc = 0$$

En effet : ${}^T(g - Hg)\, Hc = {}^T((I - H)g)\, Hc$

$$= {}^Tg \cdot {}^T(I - H) \cdot HC = {}^Tg\, (H - {}^THH)c$$

$$\underset{{}^TH = H}{=} {}^Tg\,(H - H^2) c \underset{H = H^2}{=} {}^Tg \cdot 0 \cdot c = 0 \;!$$

2.7. Propriétés de projection orthogonale 5

Soit F un ssesp. de E

La projection orthogonale sur F est une application linéaire $p_F : E \to E$ définie par $p_F(g) = h$ où $g = h + v$
$h \in F$ et $v \in F^\perp$

$(E = F \oplus F^\perp)$

Propriétés : (1) $p_F \circ p_F = p_F$

$\operatorname{Ker} p_F = F^\perp$, $\operatorname{Im} p_F = F$

2) $\forall g \in E$, $h' \in F$

on a $\|g - h'\| \geqslant \|g - p_F(g)\|$

3) Soit $k = \dim F$. Dans une base de E reunion d'une base de F et une base de $F^\perp$ la matrice de p_F est
$$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

2.8. méthode des moindres carrés

Exemple

$$\begin{cases} 2x = b_1 \\ 3x = b_2 \\ 4x = b_3 \end{cases}$$ ce système a une solution ssi $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

En pratique on a souvent des <u>systèmes inconsistantes</u> – ceux qui n'ont pas de solution.

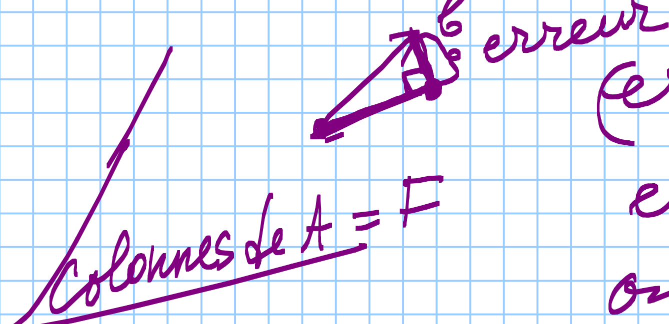
$\underline{Ax = b}$ possède une solution

A – matrice $n \times m$ x – un vecteur $(m \times 1)$
b – vecteur $(n \times 1)$, $b \in E$

$\to$ si $b \in \text{Im}\, A = \text{Vect}(\text{colonnes de } A)$

Sinon le système est inconsistant

Mais on peut chercher une "solution" qui minimise l'erreur pour que $A\hat{x}$ soit le plus proche à b.



(erreur) par Pythagore est minimale si on a $A\hat{x} = \text{Projection}(b)$

Soit $A = (a_1 \ldots a_m)$ – matrice $n \times m$

x – un vecteur $m \times 1$

$Ax = b$ – un système à n équations et m variables

Par ex. :

$$\begin{cases} 2x = b_1 \\ 3x = b_2 \\ 4x = b_3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} m = 1 \\ n = 3 \end{array}$$

erreur $= \|A\hat{x} - b\|$ vérifie

$${}^tAA\hat{x} = {}^tAb$$

$$\boxed{\hat{x} = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tAb}$$

La projection de b sur l'espace des colonnes de A est

$$P_A(b) = A\hat{x} = \underbrace{A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA}_{\text{matrice de projection}}\,b$$

<u>Exemple</u>

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 3y = 5 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 6 \end{cases}$$

pas de solution.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Colonnes de A – engendre un plan qui ne contient pas $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$${}^T\!A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} = 26 - 25 = 1 \qquad ({}^T\!A \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = ({}^T\!A A)^{-1}\, {}^T\!A b = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la solution des moindres carrés $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

L'erreur est $e = b - \underbrace{A\hat{x}}_{\text{projection}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 + 2 \\ 2 + 3 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

__Rq 1__ Si $b \in \text{Colonnes}(A)$
alors $\exists X$ t.q $b = AX$

$$P_A(b) = A({}^T\!A A)^{-1}\, {}^T\!A \underset{\substack{\parallel \\ Ax}}{b} = Ax = b$$

la solution exacte!

__Rq. 2__ Si $b \perp$ colonnes A

$${}^T\!A \cdot b = 0 \Rightarrow P_A(b) = A({}^T\!A A)^{-1}\, {}^T\!A b = 0$$

__Rq 3__ Si A est carré et inversible

$\Rightarrow$ Colonnes de A engendre $E (= \mathbb{R}^n)$ ②

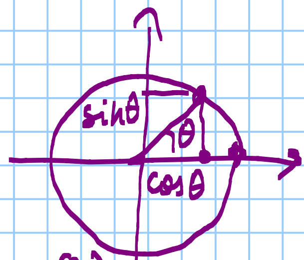
$P_A(b) = A({}^tA \cdot A)^{-1} \, {}^tA \, b = A A^{-1} ({}^tA)^{-1} \, {}^tA \, b = b$

Lyon 1

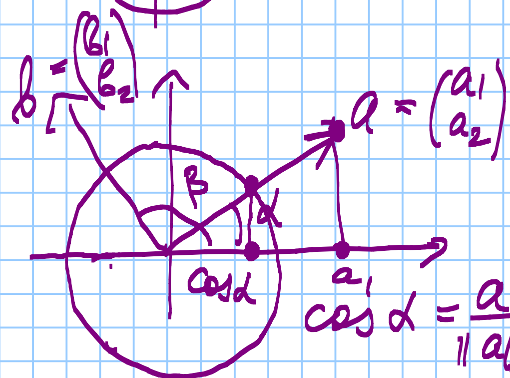
Olga KRAVCHENKO

Algèbre IV. Chapitre 2. Orthogonalité

2.9 Cosinus d'un angle



Soit $\theta = \beta - \alpha$ - angle entre deux vecteurs $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$



$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|a\|} \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\|b\|}$$

$$\sin\alpha = \frac{a_2}{\|a\|} \qquad \sin\beta = \frac{b_2}{\|b\|}$$

$$\cos\theta = \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$

$$= \frac{b_1}{\|b\|}\cdot\frac{a_1}{\|a\|} + \frac{b_2}{\|b\|}\cdot\frac{a_2}{\|a\|}$$

$$= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\|a\|\cdot\|b\|}$$

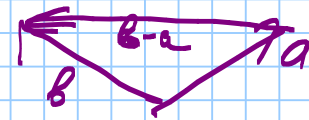
Si produit euclidien usuel alors

$$\boxed{\cos\theta = \frac{{}^T a \cdot b}{\|a\|\cdot\|b\|}}$$

Déf Le cosinus de l'angle θ formé par deux vecteurs a et b

$$\boxed{\cos\theta = \frac{{}^T a \cdot b}{\|a\|\cdot\|b\|}}$$ (dépend pas de dim de l'espa

Rq $\cos\theta = \dfrac{{}^T b \cdot a}{\|a\|\|b\|}$ aussi



Proposition

$$\|b-a\|^2 = \|b\|^2 + \|a\|^2 - 2\|b\| \cdot \|a\| \cos\theta$$

Preuve $\|b-a\|^2 = \langle b-a, b-a\rangle$

$= \langle b,b\rangle - \langle b,a\rangle - \langle a,b\rangle + \langle a,a\rangle$

$= {}^T a \cdot a + {}^T b \cdot b - 2\langle a,b\rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta$

$\langle a,b\rangle = {}^T a \cdot b = \cos\theta \cdot \|a\| \cdot \|b\|$

Si $\cos\theta = 0$ ça donne le thm de Pythagore.

2.10 Symétrie orthogonale

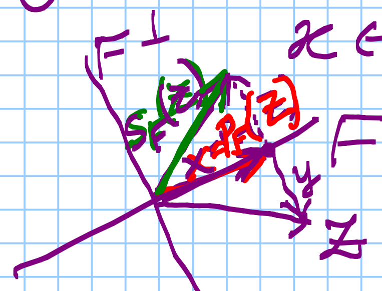
Déf L'applic linéaire

$s_F : E \to E$ t.q. $E = F \oplus F^\perp$, $F \subset E$

définie par

$s_F(z) = x - y$ où $z = x + y$, $x \in F$ et $y \in F^\perp$

$(p_F(z) = x)$



S_F est appelée la symétrie orthog. par rapport à F.

Propriétés : 1) $S_F \circ S_F = Id$

2) pour $\forall x \in F$

$S_F(x) = x$

pour $\forall y \in F^\perp$, $S_F(y) = -y$

3) S_F est symétrique (sa matrice $A = {}^TA$)

4) Soit $k = \dim F$ dans une base qui est reunion de bases de F et $F^\perp$ la matrice de S_F est $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}$

(Rappel. matrice de P_F : $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

<u>Rq</u> Comme $P_F(z) = x$ $\left(z = \underset{F}{\underset{\cap}{x}} + \underset{F^\perp}{\underset{\cap}{y}}\right)$

alors $S_F = 2P_F - Id$

<u>Exemple</u> Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et d'une base canonique a) déterminer la matrice de la projection orthogonale P sur la droite d'équation $y = 3x$

b) Déterminez la matrice de la symétrie orthogonale S par rapport à la droite $y = 3x$.

<u>Solution</u> Droite $y = 3x$

$3x - y = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ - vecteur orthog. à la droite

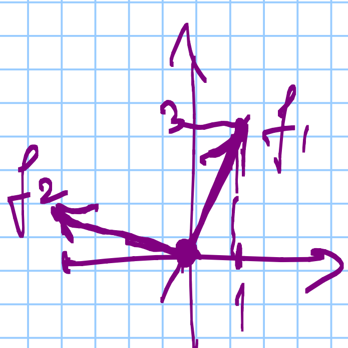
La droite $= \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

a) $P = \dfrac{a \cdot {}^t a}{{}^t a \cdot a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}(1\ 3) \Big/ {1+3^2} = \boxed{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}}$

b) $S_F = 2P_F - I$

Ici alors $S = \frac{2}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$

Autre méthode : on peut trouver P et S en faisant le calcul dans la base $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$



La matrice de P_a dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice de S_a dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Matrice de passage est

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 1 + 3\cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$