Algèbre IV – Chapitre 7

Endomorphismes symétriques

7.1. Diagonalisation

$< \varphi(x), y > = < x, \varphi(y) >$, $^{T}A = A$

$\varphi^* = \varphi$

$< \varphi(x), y > = {}^{T}(Ax) \cdot y = {}^{T}x\, {}^{T}A y$

base orthonormée

$< x, \varphi(y) > = {}^{T}x \cdot Ay$

$\Rightarrow A = {}^{T}A$ dans une b.o.n. (le produit sc. $< x, y > = {}^{T}x \cdot y$)

$\varphi^* = \varphi \iff {}^{T}A = A$ – matrice symétrique dans une base orthonormée.

<u>Théorème spectrale</u> Soit φ un endom. autoadjoint $E \to E$, esp. euclidien.

Alors:
- φ – diagonalisable
- Les sous-esp. propres de φ sont deux-à-deux orthogonaux.

En particulier, $\exists$ b.o.n. de vect. propres (en choisissant une b.o.n. dans chaque ssesp. propre par Gram-Schmidt).

- matrice symétrique diagonalisable dans une base ~~de vect.~~ orthonormée propres avec une matrice de passage P orthogonale ($P^{-1} = {}^{T}P$): A – matrice symétrique $M_n(\mathbb{R})$

$\exists$ existe $P \in O(n, \mathbb{R})$ t.q. $A' = {}^{T}PAP$ diagonale

Démo : - M.q. le polynôme caractéristique de φ est scindé ($\forall$ valeur propre de φ est réelle). Soit A - la matrice de φ dans une b.o.n. et λ une valeur propre (réelle ou complexe) de A.

λ - existe $P_A(X) = \det(A - x \cdot Id)$ - polynôme de dég n considéré comme polynôme $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine (d'Alembert)

M.q. $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ - matrice - colonne du vect. propre v de valeur propre λ

Puisque A - symétrique on a

$$\langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle$$

$A = \overline{A}$ - (A réelle)

$$\Leftrightarrow {}^T(Av) \cdot \overline{v} = {}^Tv \cdot \overline{Av} = {}^Tv \cdot A v$$

, v - vect. propre $Av = \lambda v$

$$\Leftrightarrow \lambda \,{}^Tv \cdot \overline{v} = \overline{\lambda}\,{}^Tv \cdot \overline{v}$$

$$\lambda \cdot (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2) = \overline{\lambda}\,(|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)$$

$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$ puisque $v \neq 0$

Les valeurs propres sont réelles !

— Montrons par récurrence sur la dim n de E qu'il existe une base de vect. propres

- $n = 1$ - évident
- supposons que la propriété est vraie à l'ordre $n-1$.

Soit λ une valeur propre de φ

et v - un vect. propre correspond. à λ

$\varphi(v) = \lambda v$

et $H = Vect\{v\}^{\perp}$

Notons $\dim H = n-1$

- H est invariant par φ, $\varphi(w) \in H$ si $w \in H$.

En effet, $w \in H$ alors $w \perp v$

$\langle w, v \rangle = 0$, $\langle \varphi(w), v \rangle = \langle w, \varphi(v) \rangle$

$= \langle w, \lambda v \rangle = \lambda \underbrace{\langle w, v \rangle}_{=0}$

$\Rightarrow \varphi(w) \perp v \Leftrightarrow \varphi(w) \in H$

Soit $\tilde{\varphi}$ la restriction de φ sur H

$\tilde{\varphi} : H \to H$ - endomorphisme de H.

$\tilde{\varphi}$ est autoadjoint car

$\langle \tilde{\varphi}(w), u \rangle = \langle \varphi(w), u \rangle \underset{\text{dans } E}{=} \langle w, \varphi(u) \rangle = \langle w, \tilde{\varphi}(u) \rangle$

$w, u \in H$

$\dim H = n-1$ par l'hypothèse de recurr.

il existe une base $\{e_1, \dots e_{n-1}\}$ orthog. formée de vect. propres de $\tilde{\varphi}$

$v \perp e_i$ $\forall i$ et v est un vect. propre de φ.

On va encore montrer que les esp. propres sont 2-à-2 orthogonaux.

Soit v_1, v_2 des vect. propres λ_1, λ_2.

avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. M.q. $v_1 \perp v_2$

On a $\langle \varphi(v_1), v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$

$\quad\quad\quad$ '' autoadjoint φ

$\langle v_1, \varphi(v_2) \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$

ainsi $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \underset{\substack{\text{comme} \\ \lambda_1 \neq \lambda_2}}{\Longrightarrow} \langle v_1, v_2 \rangle =$

Rq. Matrices symétrique complexes (non-réelles) ne sont pas necessairem. diagonalisables !

Par exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$P_A(x) = x^2 - \beta x - \alpha^2$ si $\beta^2 + 4\alpha^2 = 0$

(dans $\mathbb{C}$ α, β ne sont pas obligés d'êtres 0)

On aura deux racines confondues, la valeur propre double : $\lambda = \frac{\beta}{2}$

donc $P_A(x) = \left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2$

A est diagonalisable ssi $A \sim \begin{pmatrix} \beta/2 & 0 \\ 0 & \beta/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \frac{\beta}{2} Id_2$ mais $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$

$\frac{\beta}{2} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P = \frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique est non-diagonalisable !

Retours en $\mathbb{R}^n$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 25 \Rightarrow \lambda = \pm 5$$

Vect. propres pour donner la matrice de passage :

$$(A - 5I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -x + 3y = 0, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \qquad \|v_1\| = \sqrt{3^2 + 1^2}\,|t|$

$$(A - (-5)I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y = 0$$

$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} t, \quad \|v_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2}\,|t|$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = {}^{T}P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}P$$

$${}^{T}P = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

7.2. Endomorphismes symétriques positifs

Déf $\varphi : E \to E$ end. sym.

On dit que φ est <u>positif</u> si $\forall v \in E$

$\langle \varphi(v), v \rangle \geq 0$

<u>définie positif</u> si de plus

$\forall v \in E, \ \langle \varphi(v), v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

__Notation__ $S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) l'ensemble des end. sym. positifs, resp. défini positifs.

__Proposition__ Soit φ un end. sym de E

On a l'équivalence :

(i) φ est positif (resp. défini positif)

(ii) $Sp\,\varphi \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $Sp\,\varphi \in (\mathbb{R}^+)^*$)

__Preuve__ : (i) $\Rightarrow$ (ii)

Soit φ positif et λ valeur propre de φ avec v - vect. propre $\varphi(v) = \lambda v$, v - normé

$$\langle \varphi(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \underbrace{\lambda \langle v, v\rangle}$$

$$\begin{cases} \langle \varphi(v), v\rangle \geq 0 \text{ car } \varphi \in S^+(E) \quad > 0 \text{ si } \varphi \in S^{++}(E) \\ \langle v, v\rangle > 0 \text{ si } v \neq 0 \text{ (produit scalaire)} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ $\lambda \geq 0$ par conséquent. $(\lambda > 0)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Par le thm. spectral $\exists$ une base orthonorm. de vect. propres $\mathcal{B} = \{f_1, \dots f_n\}$ et $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \geq 0$ $(\lambda_i > 0)$

D'où $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ $(\varphi(f_i) = \lambda_i f_i)$

$$\langle \varphi(x), x\rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \varphi(f_i), \sum_{i=1}^n x_i f_i\rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i f_i, \sum_{i=1}^n x_i f_i\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geqslant 0 \ (>0)$$

$\Longleftrightarrow \forall x, \langle \varphi(x), x\rangle \geq 0 \ (>0)$ c. à. d. $\varphi \in S^+(E)$

Rq. $S^{++}(E) = S^+(E) \cap GL_n(E)$

$S^+(E)$: end sym. positif

$GL_n(E)$: end. inversibles

dét $\neq 0$

car $0 \in Sp\,\varphi \Longleftrightarrow \varphi \in GL(E)$

q.e.d.

<u>Matrice sym. positive</u>

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sym. est dite <u>positive</u>

si $\forall X \in Mat_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^TXAX \geq 0$

et <u>défini positive</u> si de plus ${}^TXAX = 0 \Rightarrow X = 0$

Produit scalaire canonique ${}^TXAX = \langle AX, X\rangle$

<u>Exemple important</u>: si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

alors $A = {}^TM \cdot M$ - symétrique positive

${}^TA = {}^T({}^TM \cdot M) = {}^TM \cdot {}^T({}^TM) = {}^TM \cdot M = A$ symétrique

$\forall X \in Mat_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$${}^TXAX = {}^TX{}^TMMX = {}^T(MX) \cdot MX = \langle MX, MX\rangle \geq 0$$

Si de plus $M \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $A = {}^TMM$

est symetrique définie positive.

En effet ${}^TXAX = \langle MX, MX\rangle = 0$

$\Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X = M^{-1}0 = 0$

Donc ${}^T x A x = 0 \Rightarrow x = 0$

Proposition Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ on a l'équiv

(i) A est positive (resp définie positive)

(ii) $\operatorname{Sp} A \in \mathbb{R}^+$ (resp $\operatorname{Sp} A \in (\mathbb{R}^+)^*$)

Et on a $\operatorname{Ker} {}^T A A = \operatorname{ker} A$

$\operatorname{Im} {}^T A A = \operatorname{Im} {}^T A$

Version endomorphisme $\varphi \in \operatorname{End} E$

Prop' (i) $\varphi^* \circ \varphi$ est symétrique positif

(ii) $\varphi^* \circ \varphi \in S^{++}(E)$ ssi $\operatorname{Ker} \varphi = 0$

$(\Leftrightarrow \varphi \in GL(E))$

(iii) $\operatorname{Ker} \varphi^* \circ \varphi = \operatorname{Ker} \varphi$

$\operatorname{Im} \varphi^* \circ \varphi = \operatorname{Im} \varphi^*$

Preuve : (i) $f = \varphi^* \circ \varphi$

$$f^* = (\varphi^* \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \underbrace{(\varphi^*)^*}_{\varphi} = \varphi^* \circ \varphi = f$$

$\forall x \in E \quad \langle f(x), x \rangle = \langle \varphi^* \circ \varphi(x), x \rangle$

$= \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle \geq 0$

(ii) $0 = \langle \varphi^* \circ \varphi(x), x \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle$

$\Rightarrow \varphi(x) = 0$

Si φ est inversible et $\varphi(x)=0$

$\Rightarrow x = \varphi^{-1}(0) = 0$

si $\varphi^*\circ\varphi$ est défini-positif alors

$<\varphi(x), \varphi(x)> > 0 \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$ si $x \neq 0$

alors $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ et φ est inversible

(iii) Si $x \in \operatorname{Ker}\varphi^*\circ\varphi \Rightarrow$

$0 = <\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\varphi^*\circ\varphi(x)}, x> = <\varphi(x), \varphi(x)> \Rightarrow \varphi(x)=0$

c.à.d. $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ On a montré alors

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Ker}\varphi^*\circ\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi \\ \operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi^*\varphi\end{array}\right\} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi^*\circ\varphi$$

$x \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi^*(\varphi(x)) = 0$

$x \in \operatorname{Ker}\varphi^*\circ\varphi$

On veut m.q. $\operatorname{Im}\varphi^*\circ\varphi \subset \operatorname{Im}\varphi^*$ et $\operatorname{rg}\varphi^*\circ\varphi = \operatorname{rg}\varphi^*$

$y \in \operatorname{Im}\varphi^*\circ\varphi$ si $\exists x \in E$ t.q. $y = \varphi^*(\varphi(x))$

$\Rightarrow y \in \operatorname{Im}\varphi^*$ car $\varphi(x) \xrightarrow{\varphi^*} \varphi^*(\varphi(x)) = y$

$\operatorname{rg}\varphi^*\circ\varphi = \dim E - \dim\operatorname{Ker}(\varphi^*\circ\varphi)$
$= \dim E - \dim\operatorname{Ker}\varphi$

$\operatorname{rg}\varphi^*\circ\varphi = \operatorname{rg}\varphi$

$\operatorname{rg}\varphi^* = \dim((\operatorname{Ker}\varphi)^\perp) = \dim E - \dim\operatorname{Ker}\varphi$

$<\underset{\operatorname{Im}\varphi^*}{\varphi^*(x)}, \underset{\operatorname{Ker}\varphi}{y}> = <x, \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\varphi(y)}> = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi^* \perp \operatorname{Ker}\varphi$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi^* = \operatorname{Ker}\varphi^\perp$

7.3 Rappel endomorphismes particuliers

Résumé. Soit $E, \langle\, , \rangle$ de $\dim E = n$ et $\varphi : E \to E$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\{e_1, \dots e_n\}$. A est la matrice de φ dans $\mathcal{B}$. $\forall x, y$ $\langle x, \varphi(y) \rangle = \langle \varphi^*(x), y \rangle$

φ défini un autre endomorphisme $\varphi^* : E \to E$

Si $\mathcal{B}$ est b.o.n. le produit scalaire est donné par $\langle x, y \rangle = {}^T x \cdot y$

(sinon $\mathcal{B}$ n'est pas une base orthonormée pour le produit scalaire on a $\langle x, y \rangle = {}^T x B y$ où B - la matrice de Gram à l'entrées $b_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$)

Si $\mathcal{B}$ - est une b.o.n. alors ${}^T A$ est la matrice de φ^*.

Cas particuliers de $\varphi : E \to E$

- endomorphisme orthogonal (= isométrie)

$\forall x, y \in E$ $\quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

$\iff \varphi^* \varphi = id$

$\iff {}^T A A = I$ (dans une b.o.n) $(A^{-1} = {}^T A)$

$\iff$ Col (A) forment une base orthonormée

- endomorphisme symétrique (autoadjoint)

$\langle x, \varphi(y) \rangle = \langle \varphi(x), y \rangle \, , \forall x, y \in E$

$\iff \varphi^* = \varphi$

$\iff {}^T\!A = A$ dans une b.o.n.

La matrice est diagonalisable dans une base de vecteurs propres, espaces propres sont orthogonaux deux-à-deux.

Notions de symétrique positive S^+ :

$\langle x, \varphi x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in E \iff$ valeurs propres de φ sont ≥ 0

de symétrique défini positive S^{++} :

$\langle x, \varphi x \rangle > 0 \quad \forall x \in E \iff$ valeurs propres de φ sont > 0

N'importe quel endom. $\varphi : E \to E$ en composit. avec son adjoint $\varphi^* : E \to E$. $\varphi^* \circ \varphi$ est un endomorphisme symétrique positif.

Si M est matrice de φ (dans une b.o.n.) alors ${}^T\!MM$ est matrice de $\varphi^*\varphi$. Si de plus $M \in GL_n(\mathbb{R})$ gp linéaire de matrices inversible ${}^T\!MM \in S^{++}$

Exemples Orthogonal : il suffit de prendre n'importe quelle b.o.n et écrire les coordonnées des vecteurs de cette base en colonnes pour avoir une matrice orthogonal : $\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

En dim 2 : $A = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}$ t.q $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$
et $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

v_2 v_1 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $a^2 + b^2 = 1$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ $-a^2-b^2=-1$

si $\{v_1, v_2\}$ est une base directe e_2 e_1
(sens trigo v_2 v_1) — c'est une rotation
pas de vecteur propre, si ce n'est pas une rotation d'angle π – cas de symétrie centrale $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

La forme de la matrice c'est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
et pas de vecteurs propres.

Si $\{v_1, v_2\}$ est indirecte (v_1 v_2 dans le sens trigo)
c'est une reflexion (symétrie) par rapport à une droite et la matrice est diagonalisable

en dim 2 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ valeurs propres 1 et -1

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array}$

$\det(A - I)$:

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} = (\cos\theta - 1)(-\cos\theta - 1) - \sin^2\theta$$
$$= 1 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix}$ a un vect. propre

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta+1 & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta+1 \end{pmatrix} = 1-\cos^2\theta-\sin^2\theta = 0$$

A a un autre vect. propre, à valeur propre -1.

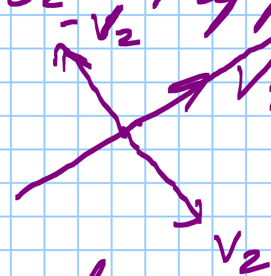
$\exists\, v_1$ et v_2 t.q. $Av_1 = v_1$, $Av_2 = -v_2$

De plus $\langle Av_1, Av_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$

mais aussi $\langle Av_1, Av_2\rangle = \langle v_1, -v_2\rangle$

on conclut que $\langle v_1, v_2\rangle = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$

C'est une reflexion par rapport à la droite porté par v_1



$\forall x \in E$, Soit $F \subset E$ alors
sous-esp.

$E = F \oplus F^\perp$. $\exists!\, x_1 \in F$ et $\exists!\, x_2 \in F^\perp$ t.q. $x = x_1 + x_2$

La symétrie par rapport à F est défini par $s(x) = x_1 - x_2$

<u>Rq</u> Soient les projection de E

$$F \xleftarrow{p_F} E \xrightarrow{p_{F^\perp}} F^\perp$$

$p_F(x) = x_1$, $p_{F^\perp}(x) = x_2$

On a $s_F = p_F - p_{F^\perp} = id - 2p_{F^\perp}$
$= 2p_F - id$

On a $\boxed{s_F^* = s_F \quad \text{et} \quad s_F^2 = id}$

$x \xmapsto{S_F} x_1 - x_2 \xrightarrow{S_F} x_1 + x_2 = x$

symétrique et orthogonale !

Reflexion est une symétrie par rapport à un hyperplan ($\dim F = n-1$)

Soit F - un hyperplan, e - vecteur unitaire orthogonal à F. La reflexion par rapport à F est $S_F(x) = x - 2\langle x, e\rangle \cdot e$

Matrice de reflexion dans une b.o.n adaptée à la decomposition $F \oplus F^\perp$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Un endomorphisme symétrique n'est pas forcement ortogonal. condition $S^* = S$ (mais pas $S^* S = id$)

symétrique ${}^tA = A$ (dans une b.o.n.)

En dim 2 il y a deux vecteurs propres faisant une b.o.n. alors la matrice est diagonalisable.

7.4. Décomposition polaire.

$z \in \mathbb{C}$ $\quad z = \underbrace{|z|}_{} \cdot e^{i\theta}$

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ orthogonal

symétrique

Soit $T : E \longrightarrow E$ endomorphisme

Inversible

Proposition. $\exists$ une décomposition de T en produit $T = R \cdot S$
orthog. symétrique

$\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$, $\langle Rx, y\rangle = \langle x, R^{-1}y\rangle$

${}^{T}A = A$ ${}^{T}B = B^{-1}$ matrice dans une b.o.n.

S - autoadj. $\Rightarrow \exists$ une base t.q. la matrice de S est diagonale et les esp. propres sont 2-à-2 orthogonaux.

En particulier, lorsque $\det T > 0$ on peut choisir R pour rotation et S un endom. positif.

C'est une décomposition polaire de T.

Démo : - On considère $T^* \circ T$ - c'est auto-adjoint défini positif (par 7.2)

- Pour $\rho \in \operatorname{End} E$ autoadj. déf. positif $\exists\, \sigma$ t.q. $\rho = \sigma^2$ (σ est dite racine carré positif de ρ) σ auto adj déf. positif.

- $\rho = T^* \circ T$ alors soit S - racine carré de $T^* \circ T$, on regarde $R = T \circ S^{-1}$ et on montre que alors R est orthogonal et alors $R S = T S^{-1} S = T$.

$T^* \circ T$ est autoadj. déf. positif.

Soit $Sp(T^* \circ T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset]0, +\infty[$

Soient $\{v_1 \dots v_i, \dots v_n\}$ une base orthonormée de vect. propres de $T^* \circ T$. On défini

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- La base des vect de $T^* \circ T$ coincide avec la base de vect. propres de S

Du coup, S est unique et S est autoadjoint.

- M.q. $R = T \circ S^{-1}$ est orthogonal:

$$\langle T \circ S^{-1}(x), T \circ S^{-1}(y) \rangle = \langle T^* \circ T \circ S^{-1}(x), S^{-1}(y) \rangle$$

$$= \langle S^2 \circ S^{-1}(x), S^{-1}(y) \rangle = \langle \underbrace{S \circ S \circ S^{-1}}(x), S^{-1}(y) \rangle$$

$$= \langle S(x), S^{-1}(y) \rangle = \langle x, \underbrace{S \circ S^{-1}}_{id}(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

on a m.q. $\langle R(x), R(y) \rangle = \langle \overset{id}{x}, y \rangle$!

D'où $T \circ S^{-1}$ est une isométrie

et on a $R = T \circ S^{-1} \Rightarrow \boxed{R \circ S = T}$

avec R orthogonal et S autoadj. défini-positif

<u>Unicité</u>? Soit $T = R \circ S$ alors $R^* T = S$

car R est orthogonal alors $R^{-1} = R^*$

$S^* = S \qquad (R^* T)^* = R^* T$

$$\begin{aligned} &\| \\ &T^*(R^*)^* = T^* R \end{aligned}$$

$$S^2 = (T^* R)\cdot(R^* \cdot T) = T^* \cdot \underbrace{(R R^*)}_{= Id} \cdot T = T^* \cdot T$$

Comme T est bijective alors S est bijectif aussi. Alors $T = R \circ S$ implique que R est unique.

<u>Rq</u> Soit $\{\tilde{v}_1, \dots \tilde{v}_n\}$ est une base de vect. propres de T^*T, elle l'est aussi de S.

Normalisation : $\left\{ v_1 = \frac{\tilde{v}_1}{\|\tilde{v}_1\|}, v_2 \dots \quad v_n = \frac{\tilde{v}_n}{\|\tilde{v}_n\|} \right\}$

donne une base orthonormée dans laquelle S est diagonale.

T agit sur $\{v_1, \dots v_n\} \mapsto \{Tv_1, \dots Tv_n\}$ aussi orthogonale.

$\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle T^* T v_i, v_j \rangle$

$= \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$

Si on normalise $\{Tv_i\}$ on a une novelle base orthonormée

Le passage de $\{v_1, \dots v_n\}$ vers

$\left\{\frac{Tv_1}{\|Tv_1\|}, \dots \frac{Tv_n}{\|Tv_n\|}\right\}$ est exactement R!

Exemple soit $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base canonique

Trouvez R et S t. q. $T = R \circ S$

Calcul $T^* \circ T$ a pour matrice ${}^tA \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,25 & 1,5 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix}$$

valeurs propres : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 4,25 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_1 = 0,25 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$

$\lambda = 0,25$ vect. propre :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1,5 \\ 1,5 & 0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x - 1,5y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalisé : $\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}$

$\lambda = 4$:

$$\begin{pmatrix} 3{,}25-4 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}75 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}75 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}$$

$$Tv_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 0{,}5/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$v_1' = \frac{Tv_1}{\|Tv_1\|} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$Tv_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 4/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad v_2' = \frac{Tv_2}{\|Tv_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

une rotation ? $R : \{v_1, v_2\} \longrightarrow \{v_1', v_2'\}$

$(v_1, v_2) = (e_1, e_2)P$

$(v_1', v_2') = (e_1, e_2)P'$

$(v_1', v_2') = R(v_1, v_2)$

$P' = RP$

avec $P = (v_1, v_2)$

$P' = (v_1', v_2')$

$$R = P'P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

P et P' sont orthogonaux alors $P^{-1} = {}^tP$

$$S = R^{-1}T = {}^tR\,T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1{,}5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8{,}5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Une autre façon à faire :

$$S = P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2}\end{pmatrix}\underset{{}^{T}P}{\underset{\|}{P^{-1}}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}5 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}8{,}5 & 3 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Finalement $T = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 1{,}5 & 1\end{pmatrix} = RS$

R - rotation $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -3 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$

et S autoadjoint positif $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}8{,}5 & 3 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$