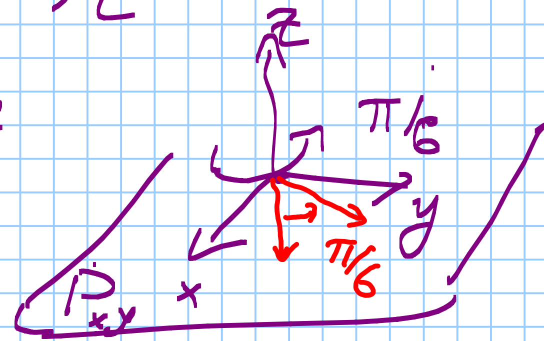
Chapitre 6. Dim 3 : isométries, angles

6.1 Sous-espaces invariants des appl. linéaires.

Soit $R \subset E$, $\varphi : E \to E$

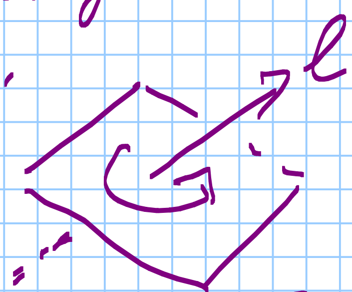
$\varphi(x) \in R$? Exemple

$x \in R$



Déf Soit $\varphi : E \to E$ appl. linéaire. Un sous-esp. $R \subset E$ est invariant par rapport à φ si $\forall x \in R$ le vecteur $\varphi(x) \in R$.

Exemples 1. triviales : sous-esp invariants - origine et aussi E.

2. 

Sous-esp invt : l'axe ℓ et le plan de rotation.

3. $E = \mathbb{R}^2$ φ : l'axe Ox multiplie par λ et Oy — " — par μ

$$\varphi(xe_1 + ye_2) = \lambda x e_1 + \mu y e_2$$

Ox et Oy sont des s-esp invariants

Si $\lambda = \mu$ $\varphi(v) = \lambda v$

Toute droite passant par O est invariant

Thm 1 $\forall\ \varphi : E \to E$ il existe un sous-esp invariant de dim 1 ou de dim 2.

Démo: Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E

système $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3 \end{cases}$, $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(*) $\det|A - \lambda Id| = 0$ – l'éqn. caractéristique de φ dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$

une éqn de dég 3 à coeffs réelles

a) Racine de l'éqn (*) est réelle alors on peut trouver une solution du système $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ réel engendrant un sous-esp. de dim 1.

b) $\lambda = \alpha + i\beta$ – complexe

$y_1 + iz_1,\ y_2 + iz_2,\ y_3 + iz_3$ – solution du système

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = \alpha y_1 - \beta z_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = \alpha y_2 - \beta z_2 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 = \alpha y_3 - \beta z_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3 = \alpha z_1 + \beta y_1 \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}z_3 = \alpha z_2 + \beta \cancel{z_2}\, y_2 \\ a_{31}z_1 + a_{32}z_2 + a_{33}z_3 = \alpha z_3 + \beta \cancel{z_3}\, y_3 \end{cases}$$

$v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

$Av = \alpha v - \beta w$ et $Aw = \alpha w + \beta v$

$\Rightarrow$ Sous-esp. engendré par v et w est invariant par rapport à A.

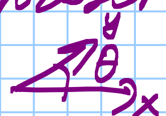
En partic en dim 3 . $\forall$ appl. linéaire possède un sous-esp invariant de dim 1.

6.2 Isométries en dim 3

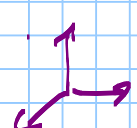
End. orthogonal = automorph. orthog. = isométrie

$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E$

Rq. – A preserve des normes, angles



$\cos\theta = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$

–  $e_i \perp e_j \quad i \neq j$ – base orthogon. normale

$\|e_i\| = 1, \forall i$

$\{Ae_1, Ae_2, Ae_3\}$ – est aussi un b. o. n.

– $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, {}^tA \cdot Ay \rangle = \langle x, y \rangle$

$\langle \varphi x, \varphi y \rangle = \langle x, \varphi^* \cdot \varphi y \rangle$

${}^tA \cdot A = Id \qquad \det A = \pm 1$

Lemme soit R – sous-esp. invariant par rapport à A, alors son orthogonal

$R^\perp$ l'est aussi. C'est à dire

Pour $\forall x \in R$, on a $R^\perp = \{ y \in E / \forall x, \langle y, x \rangle = 0 \}$

$Ay \in R^\perp$ i.e. $\langle Ay, x \rangle = 0$, $\forall x \in R$

<u>Démo</u> : Soit $y \in R^\perp$: $\langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in R$

A est orthogonal $\Rightarrow$ A est bijective et en partic. A est <u>bijectif sur R</u>

$\forall x \in R$, $\underline{\exists z \in R}$ t.q. $\underline{x = Az}$ En particulier $z \perp y$.

On veut m.q. $R^\perp$ est invariant :

si $y \in R^\perp$ alors $Ay \in R^\perp$

$\forall x : \langle x, y \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x : \langle x, Ay \rangle = 0$

On a $\langle x, Ay \rangle = \langle Az, Ay \rangle \underset{\uparrow}{=} \langle z, y \rangle = 0$

A - isométrie

Alors $Ay \in R^\perp$

<u>dim 1</u> L'applic orthog sur la droite R^1

$Ae = \lambda e$ comme $\langle Ae, Ae \rangle = \langle e, e \rangle$

alors $\langle \lambda e, \lambda e \rangle = \lambda^2 \langle e, e \rangle = \langle e, e \rangle \Rightarrow \lambda^2 = 1$

$\lambda = \pm 1$. $Ax = x$, $Ax = -x$

<u>dim 2</u> e_2, e_1 $A : R^2 \to R^2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

<u>Cas 1</u> $\boxed{ad - bc = 1}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad (1)$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (2) (1)+(2) on conclut que A a pour matrice

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$

On pose $a = \cos t$, $b = \sin t$

$\forall$ endom. orthogonale de dét 1 en dim. 2 a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

ce qui correspond à la rotation d'angle t

<u>Cas 2</u> $ad - bc = -1$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Polynôme caract. est

$\lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{trA}\lambda \underbrace{- 1}_{détA}$ a les racines

réelles, possède des vecteurs propres

$Av = \lambda v$, A est orthogonal $\Rightarrow \lambda = \pm 1$

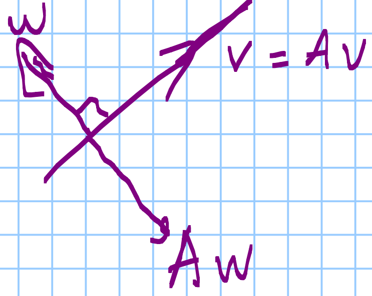
Soit w t.q. $w \perp v$ A agit sur v, w

$Av = \pm 1$ alors $Aw = \pm 1$

La matrice dans la base $\{v, w\}$ est

$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ Comme dét $= -1$ on a

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ reflexion par rapport au premier vecteur

6.3. dim 3 $O_3(\mathbb{R})$ - groupe des endom. orthogonaux en dim 3.

Thm Soit A une appl. orthog. de $\mathbb{R}^3$. Dans $\mathbb{R}^3$ il existe une base orthonormée e_1, e_2, e_3 dans laquelle la matrice de A est

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Preuve Selon le thm 1 on peut choisir un ssesp. invariant de dim 1, notons le R_1. Soit e_1 le vecteur de R_1 de longueur 1.

$$\underbrace{Ax = \pm x}_{x \in R_1}$$

si on choisi un sous-esp inv R_2 de dim 2 on a l'action de A sur R_2 - rotation de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Rq. En générale en dim n quelconque thm se généralise : il exise une base t.q. A - un end. orthog. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & & \\ & & -1 & & & & & \\ & & & \ddots -1 & & & & \\ & & & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & \\ & & & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ & & & & & & \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

<u>Exemple</u> $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

${}^tA\,A = \mathbb{1}$ $\quad c_i$ - colonnes $\|c_i\|^2 = 1$ $\quad \langle c_i, c_j\rangle = 0$, $i \neq j$

$c_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $c_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$\|c_1\| = \sqrt{(2/3)^2 + (2/3)^2 + (-\frac{1}{3})^2} = 1$

$\langle c_1, c_2\rangle = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} + 4/3 - 2/3 = 0$

$\langle c_1, c_3\rangle = 0$, $\langle c_2, c_3\rangle = 0$.

<u>L'axe de rotation ?</u>

valeur propre $\lambda = 1$

$A - \lambda Id = A - Id = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-3 & -1 & 2 \\ 2 & 2-3 & -1 \\ -1 & 2 & 2-3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$v \in Ker(A - Id)$ - orthog. à l'esp. lignes

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$ $\overset{2L_1 + L_2}{\underset{L_1 - L_2}{\Longrightarrow}}$ $\begin{cases} -3y + 3z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \end{cases}$

$x=y=z$ $\quad R_1$ engendré par $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

L'angle $\quad \operatorname{tr} A = 2\cos\theta + 1$ $\qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

$$\cos\theta = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm \pi/3$$

Pour trouver si c'est $+\pi/3$ ou $-\pi/3$

On choisi $w = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et un vect. $u \perp w$

le plan $R_1^{\perp}$ est donné par l'équ.

$$\langle w, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\rangle = 0 \qquad (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \boxed{x+y+z=0}$$

On choisi par ex. $u = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \in R_1^{\perp}$ le plan $x+y+z=0$

$$Au = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

On regarde l'angle θ entre u et Au

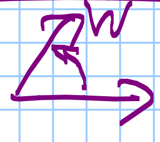
On cherche $\sin\theta$?

$$\sin\theta = \frac{\det\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\theta = \pi/3\right)$$

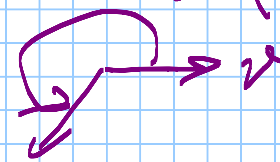
Ainsi A représente la rotation de l'angle $\pi/3$ autour de l'axe dirigé et orienté $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

6.4. Angles orientés

$\cdot\ v, w \in \mathbb{R}^2$ dans un plan

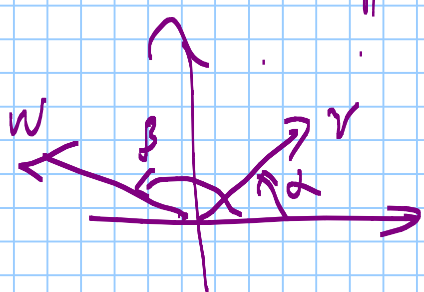


$\theta = (\widehat{v, w})$



On appelle angle orienté entre v et w l'angle dans le sens trigonométrique

$\sin\theta = \dfrac{\det \| v, w \|_{\{e_i\}}}{\|v\| \cdot \|w\|}$ – dans une base canonique



soit $v = \|v\| \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, $w = \|w\| \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$

α, β – angles orientés avec l'axe Ox

$\det(v, w)_{\{e_i\}} = \|v\| \|w\| \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix} = \|v\|\|w\| (\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)$

$= \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\beta - \alpha) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin\theta$

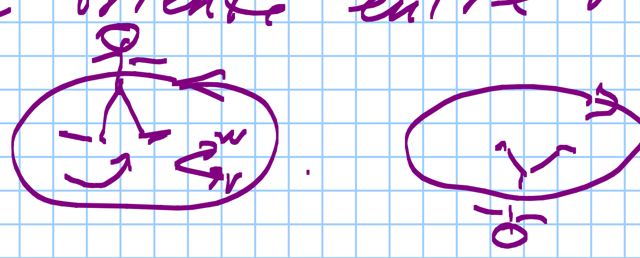
Rq L'aire d'un parallelogramme :

$A(v, w) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot |\sin\theta|$

Rq $\sin\theta > 0 \iff \det(v, w)_{\{e_i\}} > 0$

ssi la base $\{v, w\}$ a la même orientation que la base canonique.

Dans $\mathbb{R}^3$ Angle orienté entre v et w sens trigo ?



$P = \mathrm{Vect}\{v, w\}$ - plan

orientation du plan $\det(v, w, \vec{n}) > 0$

règle de tire-bouchon (d'Ampère) en phys.

$$\sin\theta = \frac{\det(v, w, n)_{\{e_i\}}}{\|v\|\,\|w\| \cdot \|n\|}$$

$$|\det(v, w, n)_{e_i}| = \mathrm{Vol}(v, w, n) = A(v,w) \cdot \|n\|$$
$$= \sin\theta\, \|v\| \cdot \|w\| \cdot \|n\|$$

calcul d'angle de rotation :

On choisi un vect. $\vec{n}$ de E_1 (resp E_{-1})

et un vect. v du plan de rotation $E_1^{\perp}$ (resp $E_{-1}^{\perp}$)

on obtient l'angle de rotation comme angle entre v et $A(v)$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\det(v, A(v), \vec{n})}{\|v\|^2\, \|\vec{n}\|}}$$

$\left(\|v\| = \|Av\| \text{ orthog}\right)$