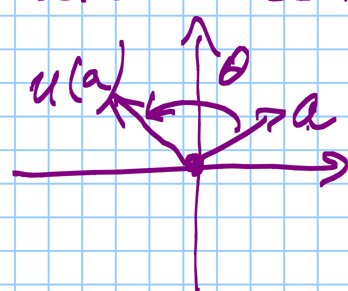
Chapitre 5. Groupe Orthogonal

5.1 Définitions Endomorphismes orthogonaux.

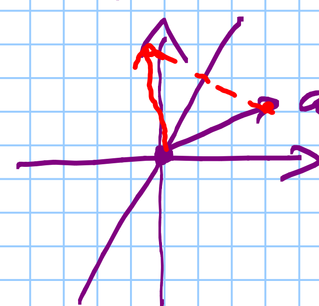
Un endomorphisme $u : E \to E$ est dit orthogonal s'il conserve la norme : $\forall x \in E$ on a $\|u(x)\| = \|x\|$

On dit que u est une isométrie vectorielle.

<u>Exemple</u> Movements du plan preservant les distances : rotations ou reflexions



rotation d'angle θ.



reflexion par rapport à une droite.

<u>Propriétés</u>: u - endomorphisme orthogonal

1) alors $\langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$

2) u est un isomorphisme de E

3) La composée de deux isométries est une isométrie.
L'inverse d'une isométrie est une isométrie.

4) Une isometrie transforme une

b.o.n. vers une b.o.n.

$\boxed{\text{5.2. Matrices orthogonales}}$

Déf Une matrice $n \times n$ est dite orthogonale si $^T A \cdot A = I_n$ (I_n - matrice identité)

Propriétés caractéristiques $I_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{n} \Big\} n$

Equivalence :

(1) A est orthogonale

(2) A est une matrice d'un endom. orthogonal $u : E \to E$ dans une base orthonormale

(3) A est la matrice de passage d'une b.o.n → une autre b.o.n.

(4) Les colonnes de A sont orthonormales.

Cond. necessaires

(a) Si A est orthogonale $\det A = \pm 1$

$(^T A A = I_n \Rightarrow \det {^T A} \cdot A = \det {^T A} \cdot \det A = (\det A)^2 = 1)$

(b) une matrice orthogonale A est inversible avec l'inverse de A étant $^T A$

$A^{-1} = {^T A}$

(c) L'inverse de A, une matrice orthogonale, est une matrice orthogonale.

Le produit de deux matrices orthog. est une matrice orthogonale.

O_n – l'ensemble des matrices orthogonales – groupe orthogonal

5.3 Notion d'un groupe. Exemples

Un ensemble G est un groupe si on a une opération de composition $G \times G \to G$

$$(g, h) \mapsto g \cdot h$$

t.q. – $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$ – associativité

– $\exists\, e$ – élément neutre

$\forall g \in G, \quad e \cdot g = g \cdot e = g.$

– $\exists$ inverse :

$\forall g \in G \quad \exists\, g^{-1} \in G$ t.q. $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

Exemples : 1) $(\mathbb{Z}, +)$ $\quad (a, b) \mapsto a + b$

– $a + (b + c) = (a + b) + c$ – associativité

– 0 – neutre

– $-a$ – l'inverse de a

$(\mathbb{Z}, +)$ – groupe additif

$a + b = b + a$ – commutatif (= abélien)

2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ – pas un groupe

$(\mathbb{Q}, \cdot)$, $\quad \mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{N}^* \}$

– élém neutre : 1

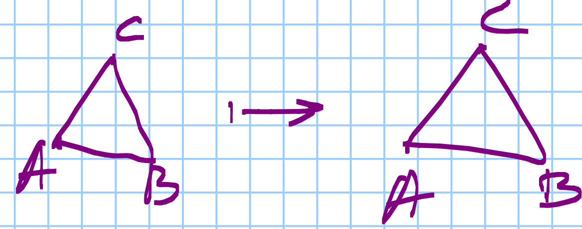
– l'inverse de $x = \frac{p}{q}$ est $x^{-1} = \frac{q}{p} = \frac{\varepsilon \cdot q}{|p|}$

où ε = signe de p $+1$ ou -1

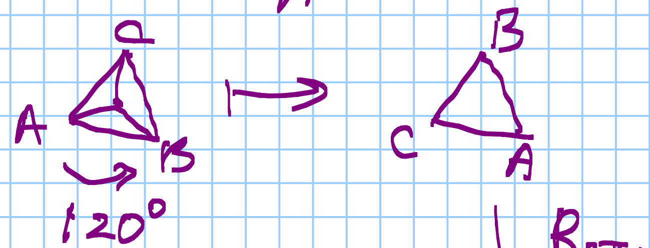
$(\mathbb{Q}, \cdot)$ – gp multiplicatif abélien : $xy = yx$

3) Groupe de mouvement du plan qui préserve un triangle équilatéral (préservant les distances)

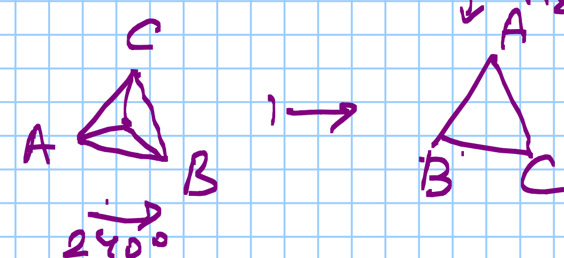
Id: $ABC \mapsto ABC$



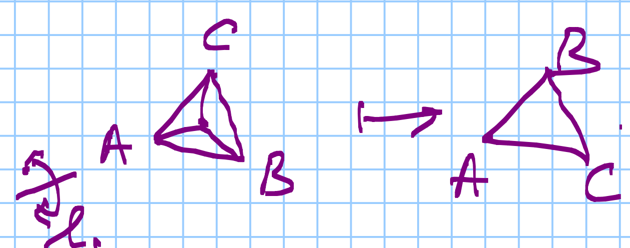
$R_{\frac{2\pi}{3}}$: $ABC \mapsto CAB$



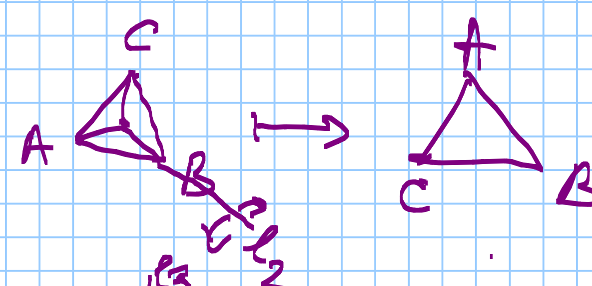
$R_{\frac{4\pi}{3}}$: $ABC \mapsto BCA$



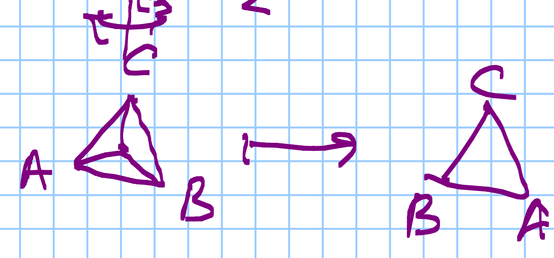
S_{l_1} : $ABC \mapsto ACB$



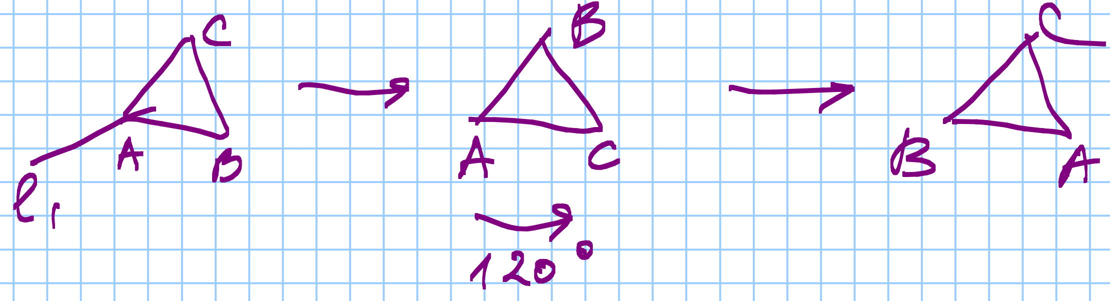
S_{l_2} : $ABC \mapsto CBA$

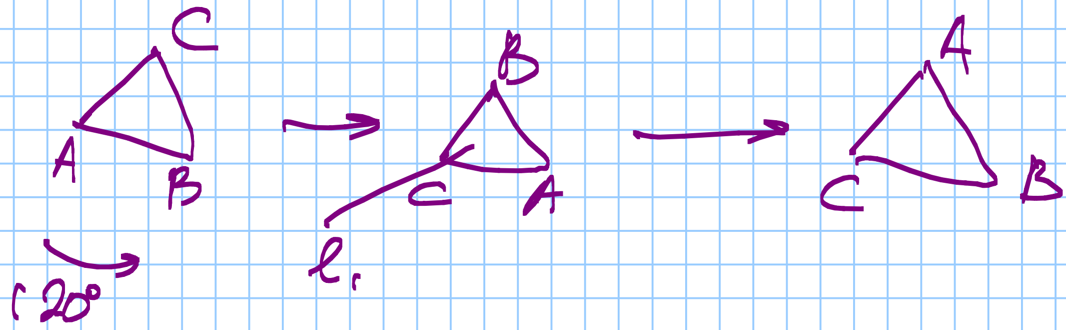


S_{l_3} : $ABC \mapsto BAC$



$R_{\frac{2\pi}{3}} S_{l_1} \neq S_{l_1} R_{2\pi/3}$ — pas commutatif





S_3 - groupe de <u>permutation</u> de <u>trois</u> points

$S_3 = \{ Id, R_{2\pi/3}, R_{4\pi/3}, S_{l_1}, S_{l_2}, S_{l_3} \}$

6 éléments.

4) $(Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$

- associatif
- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - élém. neutre
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a pour l'inverse $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

5) $(\underbrace{Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})}, \cdot)$, $\cdot$ - produit des matrices

- associatif
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - élém. neutre
- inverse? - Il faut prendre que des matrices inversibles

Groupe des matrices inversibles 2×2

$GL_2(\mathbb{R})$ ($n\times n \to GL_n(\mathbb{R})$ - matrices $n\times n$ inversibles)

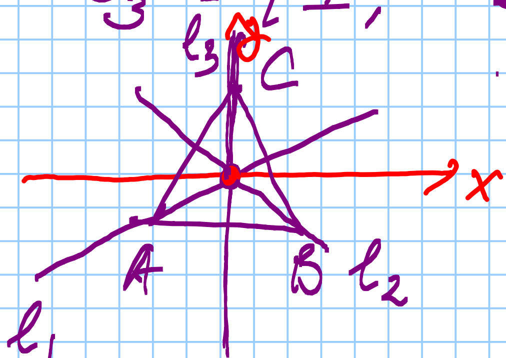
Groupe linéaire

6) $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$

groupe orthogonal est un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{R})$

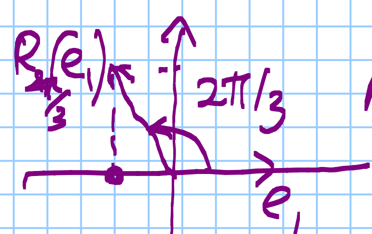
5.4. Groupe $O_2(\mathbb{R})$

$S_3 = \{I, R_{2\pi/3}, R_{4\pi/3}, S_{\ell_1}, S_{\ell_2}, S_{\ell_3}\}$

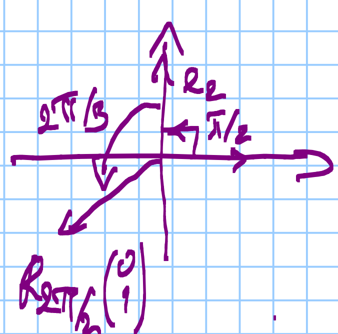


$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_{2\pi/3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_{2\pi/3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$R_{2\pi/3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 \end{pmatrix}$



$R_{2\pi/3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R_{2\pi/3}\left(R_{\pi/2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -\sin 2\pi/3 \\ \cos 2\pi/3 \end{pmatrix}$

Matrice de $R_{2\pi/3}$ $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix}$

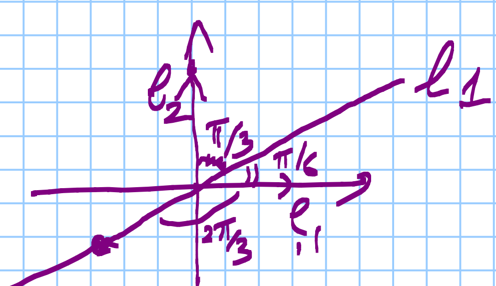
$$= \begin{pmatrix} -1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

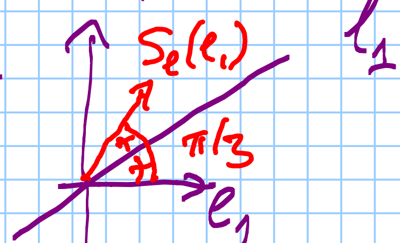
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \longrightarrow \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

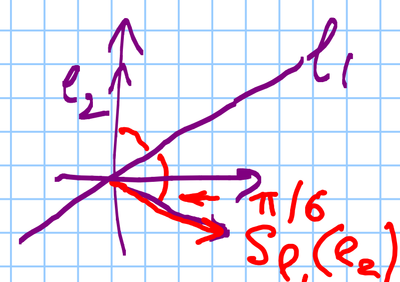
La norme $\left\| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \underline{1}$

$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ (produit scalaire : $(\cos\theta \;\; \sin\theta)\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = 0$

Matrice de S_{ℓ_1} :







$S_{\ell_1}(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\pi/3 \\ \sin\pi/3 \end{pmatrix}$, $S_{\ell_1}(e_2) = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/6) \\ \sin(-\pi/6) \end{pmatrix} =$

Matrice : $\begin{pmatrix} \cos\pi/3 & \cos\pi/6 \\ \sin\pi/3 & -\sin\pi/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/3 & \sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & -\cos\pi/3 \end{pmatrix}$

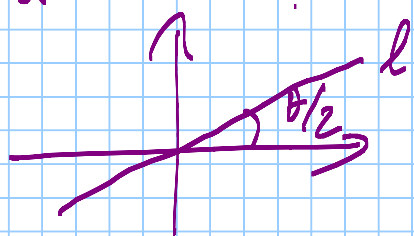
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\cos(-\pi/6) = \sin(-\pi/6 + \pi/2) = \sin(\pi/3).$$

$$\sin(-\pi/6) = -\cos(-\tfrac{\pi}{6} + \pi/2) = -\cos(\pi/3)$$

En générale: matrice d'une symétrie par rapport à la droite ℓ

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} : S_\ell$$



$$\det \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$O(2) \begin{cases} \to \underline{\det = 1 \quad > 0} \leftarrow \text{rotations} \\ \searrow \det = -1 \quad < 0 \leftarrow \text{symétries axiales} \end{cases}$$

Groupe de rotations est un sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$. on l'appel un sous-gp. speciale : $SO_2(\mathbb{R})$

5.5. Orientation d'un espace E

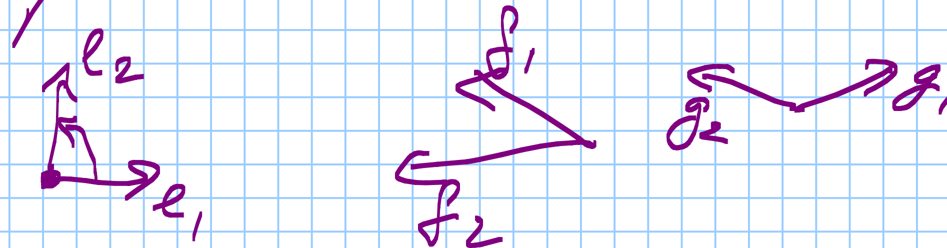
Soit B et B' deux bases de E. La matrice de passage de $B \to B'$ a un dét non nul : dét > 0 ou dét < 0.

Cela partage les bases de E en

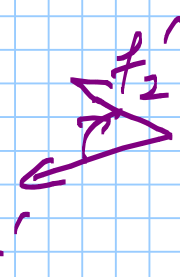
deux classes.

À partir d'une base choisi B toutes les bases B' t.q. les matrices de passages de $B \to B'$ ont le dét > 0 — appelées les bases directes, les autres bases — indirectes.

Autrement dit : orientation d'un espace E est un choix d'une base particulière.



bases directes



base indirecte.
