algèbre géométrique. Chapitre 4 1

Formes linéaires. Endomorphismes.

4.1. Dualité dans l'espace euclidien

E - un esp euclid. de dim. n

Si on fixe $a \in E$ l'application

$$\varphi_a : E \to \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$$
$$x \mapsto \langle a | x \rangle$$

Proposition : φ_a est une application linéaire $E \to \mathbb{R}$ (= forme linéaire sur E). $\operatorname{Ker} \varphi_a = \{a\}^\perp$

Preuve. $\varphi_a(\lambda x + \mu y) = \langle a | \lambda x + \mu y \rangle$
$= \lambda \langle a | x \rangle + \mu \langle a | y \rangle = \lambda \varphi_a(x) + \mu \varphi_a(y)$

aussi soit $x \in \operatorname{Ker} \varphi_a \iff \varphi_a(x) = 0$
$\iff \langle a | x \rangle = 0 \iff x \in \{a\}^\perp$

Rq L'orthogon. d'un vecteur est de dim $n-1$, un hyperplan

Prop Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots e_n\}$ b.o.n. et H un hyperplan de E.
Un vecteur $n = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ est normal à H ssi $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ est une équation de H.

Exemple Dans $\mathbb{R}^3$, $n = (1, 2, -1)$

le plan orthogonal à n (de vect. normal n) a pour éqn $x+2y-z=0$

Rq De la prop. suit que

$\dim(\operatorname{Im}\varphi_a)=1$, $\dim(\operatorname{Ker}\varphi_a)=n-1$

Déf E - $\mathbb{k}$ esp vect.

L'ensemble de toutes applic. linéaires $E \to k$ est un esp. vectoriel, noté E^* (ou $\mathcal{L}(E,k)$) - le dual de E.

Ces éléments - les applic. linéaires (à valeurs dans k) = les formes linéaires

Exemples : - Si $E = \mathbb{R}^n$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i$: une forme linéaire sur E.

- Pour $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en a, la différentielle $D_a(f)$ est une forme linéaire

- $M \longmapsto \operatorname{tr} M$ est une forme linéaire sur $\operatorname{Mat}_n(k)$

4.2. Espace dual

Thm (Representation) Soit E un esp. euclidien de dim n. alors

$$\varphi: E \longrightarrow E^* \quad \text{t.q} \quad \varphi_x(y) = \langle x | y \rangle$$
$$x \longmapsto \varphi_x$$

est un <u>isomorphisme</u> des esp. vectoriels

<u>Preuve</u> : φ est linéaire $\forall x, y \in E$, $\lambda \in k$, $\mu \in k$

$\varphi(\lambda x + \mu y) = \varphi_{\lambda x + \mu y} = \lambda \varphi_x + \mu \varphi_y \leftarrow$ réel

On va m.q. $\forall f \in E^*$, $\exists ! \, a \in E$ t.q. $f = \varphi_a$.

$f \in E^*$: f - est une applic linéaire de $E \to \mathbb{R}$ Donc $\dim \mathbb{R} = \dim(\operatorname{Im} f) = 1$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = n$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} f) = n - 1$

Choisissons un vecteur $x_0 \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$

Soit $a = \dfrac{f(x_0)}{\langle x_0 | x_0 \rangle} \cdot x_0$

En effet, soit $y \in E$

$$\varphi_a(y) = \left\langle \frac{f(x_0)}{\langle x_0 | x_0 \rangle} x_0 \,\middle|\, y \right\rangle = \frac{f(x_0)}{\langle x_0 | x_0 \rangle} \langle x_0 | y \rangle$$

$y = y_1 + y_2$ où $y_1 \in \operatorname{Ker} f$ et $y_2 \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$

$f(y) = f(y_1 + y_2) = f(y_2)$

$\dim (\operatorname{Ker} f)^{\perp} = 1 \Rightarrow$ comme y_2 et x_0 sont dans $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.q.

$y_2 = \alpha \cdot x_0$ et alors $f(y) = f(y_2) = \alpha f(x_0)$

mais $\langle x_0 | y \rangle = \langle x_0 | y_1 + \alpha x_0 \rangle = \alpha \langle x_0 | x_0 \rangle$

$\Rightarrow \varphi_a(y) = \dfrac{f(x_0)}{\langle x_0 | x_0 \rangle} \alpha \langle x_0 | x_0 \rangle = \alpha f(x_0) = f(y)$!

c'était une démonstration constructive

une autre démonstration par le considér. de dim.:

φ est <u>injective</u> car si $a \in \ker \varphi$

alors $\varphi_a(x) = 0$ et en partic. on a

$\varphi_a(a) = \langle a | a \rangle = 0 \Rightarrow a = 0$

E et E^* sont deux esp <u>de même dim $< \infty$</u> toute applic injective est bijective $\Rightarrow \varphi$ est un isomorphisme de E et E^*.

Pour m.q. $\dim E^* = \dim E = n$ on construit une base de E^*.

Soit $\{e_1, \dots e_n\}$ une base de E

on défini $\{f^1, \dots, f^n\}$ - n éléments de E^* comme suit

$$f^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f^i - applic. linéaire à valeurs réelles

c'est une base car

(1) c'est une famille libre

$c_1 f^1 + \dots + c_n f^n = 0$

On considère $(c_1 f^1 + \dots + c_n f^n)(e_i) = 0$

$= \underbrace{c_1 f^1(e_i) + \dots}_{0} + c_i f^i(e_i) + \underbrace{\dots \; c_n f^n(e_i)}_{0}$

Donc $c_i f^i(e_i) = 0 \Rightarrow c_i = 0$

(2) Engendre E^* : soit $w \in E^*$

on applique w à un élément de E

$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$: $w(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$

$= \lambda_1 w(e_1) + \dots + \lambda_n w(e_n)$ $\qquad f^1(e_1) = 1$

$= \lambda_1 w(e_1) f^1(e_1) + \dots + \lambda_n w(e_n) f^n(e_n)$ $\qquad f^2(e_2) = \cancel{2}1$

$\vdots$

$= w(e_1) f^1(\lambda_1 e_1) + \dots + w(e_n) f^n(\lambda_n e_n)$ $\qquad f^n(e_n) = \cancel{n}1$

$(f^i(e_i) = 1)$

$= w(e_1) f^1(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) + \dots + w(e_n) f^n(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$

$= (w(e_1) f^1 + \dots + w(e_n) f^n)(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$

Donc $w = w(e_1) f^1 + \dots + w(e_n) f^n$

En conclusion $\forall w \in E^*$ se présente comme combinaison linéaire de $f^1, \dots, f^n$

4.3 Adjoint d'un endomorphisme.

On considère des applic. linéaires de $E \to E$, noté $End(E)$.

E - esp. euclidien

Déf Soit $U \in End\, E$. On dit que $V \in End\, E$ est adjoint de U si pour $\forall (x,y) \in E \times E$

on a $\langle x \mid U(y) \rangle = \langle V(x) \mid y \rangle$

Rq pour E euclidien par symétrie

U - adjoint de $V \Longleftrightarrow V$ adjoint de U.

Thm Soit $U \in \operatorname{End} E$. Alors U admet un unique endomorphisme adjoint, noté U^*.

Preuve Par le thm. de representation :

soit $y \in E$ on pose $f_y : x \longmapsto \langle U(x) \mid y \rangle$

c'est une applic linéaire $\Rightarrow$ il existe un unique $y_0 \in E$ t.q.

$$f_y = \varphi_{y_0} \quad \text{t.q.} \quad \forall x \quad f_y(x) = \varphi_{y_0}(x)$$

$$\langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid y_0 \rangle$$

On pose u^* l'application qui à y associe y_0. u^* est linéaire (par linéarité de U).

Expression matricielle

Soit $\mathcal{B}$ une b.o.n de E.

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ coord. de X dans $\mathcal{B}$

$y = (y_1, \ldots, y_n)$ coord de y

Soit M - matrice de U dans $\mathcal{B}$.

M^* - matrice de u^* dans $\mathcal{B}$

dans une b_o.n : $\langle x \mid y \rangle = {}^t x \, I y = {}^t x \cdot y$

I - matrice identité, matrice de produit scalaire

on a $\langle x \mid u(y) \rangle = {}^t x \underbrace{M y}_{u(y)}$

et $\langle u^*(x) \mid y \rangle = {}^t(M^* x) \, y = {}^t x \, {}^t M^* y$

$\langle x \mid u(y) \rangle = \langle u^*(x) \mid y \rangle$

${}^t x \, M y = {}^t x \, {}^t M^* y$ on a donc $M^* = {}^t M$

<u>Rq</u> Si $\mathcal{B}$ est une base quelconque et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\langle , \rangle)$ - la matrice de produit scalaire ${}^t M^* = A M A^{-1}$ (calcul!)

<u>Lemme</u> (1) L'application

$u \longrightarrow u^*$ est linéaire (dans $\mathbb{R}$)

semi-linéaire (dans $\mathbb{C}$)

$(u + w)^* = u^* + w^*$, $(\alpha u)^* = \alpha u^*$

(2) $(uv)^* = v^* u^*$, $(u^*)^* = u$

(3) Si u est inversible u^* l'est aussi $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

<u>Déf</u> Un endomorphisme u est dite <u>auto-adjoint</u> (ou symétrique) si $u = u^*$

Si $k = \mathbb{R}$ cela donne :

u - est auto-adjoint $\iff$ sa matrice dans une b.o.n. est <u>symétrique</u> $M = {}^tM$

<u>Trois cas étudiés en profondeur</u> :

- auto-adjoint si $u^* = u$
- orthogonal si $u^* = u^{-1}$
- normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$

<u>Exemple</u> toute proj. orthogonale P_F vérifie $P_F = P_F^2 = P_F^*$ autoadj.

En effet si $\{e_1, \dots e_k\}$ est b.o.n. de F et $\{e_{k+1}, \dots e_n\}$ de $F^\perp$ on a $\mathcal{B} = \{e_1, \dots e_n\}$ une b.o.n. de E et $A = Mat_{\mathcal{B}} P_F = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A = A^2 = {}^tA$

<u>Exo</u> si $f = f^* = f^2$ $(f : E \to E)$

alors $f = P_F$ pour un certain s.e.v. $F \subseteq E$

Comment trouver F ?

4.4 <u>Endomorphisme orthogonal</u>

$u^* = u^{-1}$, $\langle ux \mid uy \rangle = \langle u^* u x \mid y \rangle$
$= \langle x, y \rangle$

- preserve le produit scalaire
- preserve la norme

Soit $O \in Mat_n(\mathbb{R})$ une matrice t.q. $O^{-1} = {}^tO$ dite orthogonale.

Lemme Toutes valeurs propres (complexes) de O sont de module 1.

Lemme Soit $U \in Mat_n(\mathbb{C})$ t.q. $U^{-1} = \overline{{}^tU}$ dite unitaire alors toutes les valeurs propres de U sont de module 1.

Rq dét O et dét U — de module 1

$|\det O| = 1$ et $|\det U| = 1$.

Démo : Soit $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$Ux = \lambda x$. On pose $\|x\|^2 = \langle x | x \rangle$

$= {}^t\bar{x} \cdot x = \sum_1^n |x_i|^2 > 0$

alors $\langle x | x \rangle = {}^t\bar{x} \cdot x = {}^t\bar{x}\left({}^t\bar{U} \cdot U\right) \cdot x$

$= {}^t(\overline{Ux}) \cdot Ux = \left(\bar{\lambda}\,{}^t\bar{x}\right) \cdot \lambda x = \bar{\lambda} \cdot \lambda\,{}^t\bar{x} \cdot x$

${}^t(\overline{Ux}) = {}^t\bar{x}\,{}^t\bar{U}$

$= \lambda\bar{\lambda} \cdot \|x\|^2 \Rightarrow \lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$

Lemme Soit $B = (e_1 \ldots e_n)$ une b.o.n. et $B' = (e_1' \ldots e_n')$ une base quelconque P — matrice de passage. Alors P est orthogonale ssi B' est orthonormée.

Lemme Une matrice $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ est orthogonale ssi ces colonnes (lignes) forment une base orthonormée par rapport au produit scalaire standard

4.5 Endormorphisme symétrique

$S : E \to E$ est dite symétrique si $\forall x, y \in E$ on a $\langle S(x) | y \rangle = \langle x | S(y) \rangle$

Propriétés : Soit $S : E \to E$ un end. sym. alors

1. La matrice de S dans une b.o.n. est symétrique.
2. Le polynôme caractéristique de S a n racines réelles
3. Les espaces propres relatifs à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux
4. Il existe une b.o.n. de E formée de vect. propres de S. donc S est diagonalisable dans une b.o.n.

Soit A une matrice sym. réelle
q - une forme quadratique associée.

Alors q est

1. Positive ssi les valeurs propres de A sont positives (≥ 0)
2. Définie positive ssi les valeurs propres de A sont strict. positive(>0)

Thm Soit f une forme bilin. sym.
q - forme quadratique associée.
Il existe alors une b.o.n. de E qui est orthogonale pour f.