CONTRÔLE CONTINU 1

CORRIGÉ

Durée : 90 minutes.

Exercice 1. Vrai ou faux

Indiquer si la proposition est vraie ou fausse. Justifier votre reponse - donner une preuve courte (moins d'un paragraphe). Si une proposition est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.

1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel (et la norme associée). Soient v, w deux vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^n$. Si $\|v-w\| = \|v+w\|$ alors v et w sont orthogonaux.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, les matrices réelles $n \times n$. Si ${}^tA \cdot A$ est nulle alors A est nulle.

1. VRAIE. $\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \langle v,v\rangle - 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle$

$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle$

$\|v-w\| = \|v+w\| \Rightarrow \langle v,v\rangle - 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle = \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle$

$\Rightarrow 4\langle v,w\rangle = 0 \Rightarrow v \perp w$

2. VRAIE. Soit $a_1, \dots, a_n$ - les vecteurs colonnes dans la matrice A. On remarque que les entrées de $({}^TA\cdot A)_{ij} = {}^Ta_i \cdot a_j$. En particulier, ${}^Ta_i\cdot a_i = 0 \Rightarrow a_i \equiv 0$ pour $\forall i \in [\![1,n]\!] \Rightarrow A \equiv 0$.

Exercice 2. Cauchy-Schwarz

Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout a, b réels positifs on a

$$\frac{(a+b)^2}{5} \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3} \qquad (1)$$

Pour cela on se place d'abord dans l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel $\langle\, , \rangle$. Soient a, b, d, e quatre nombres réels positifs. On va démontrer le résultat plus général :

$$(a+b)^2 \leq \left(\frac{a^2}{d} + \frac{b^2}{e}\right)(d+e) \qquad (2)$$

1. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux vecteurs U et V de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour démontrer (2), appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des vecteurs U et V bien choisis. *Indication.* Pour la première coordonnée de U on peut prendre $\frac{a}{\sqrt{d}}$, et on pensera à quelque chose d'équivalent pour sa seconde coordonnée...
3. En déduire l'inégalité (1).
4. Donner une généralisation possible en utilisant la dimension $n \geq 2$. On ne demande pas de montrer cette généralisation.

1. $\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u,u\rangle \cdot \langle v,v\rangle$

2. $u = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{d}} \\ \frac{b}{\sqrt{e}} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ \sqrt{e} \end{pmatrix}$ donne

$\langle u, v\rangle = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{d}} \\ \frac{b}{\sqrt{e}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{d} \\ \sqrt{e} \end{pmatrix} = a + b$

3. $d = 2, e = 3$ donne $(a+b)^2 \leq \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3}\right)\cdot(2+3)$

$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{5} \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3}$

4. Soit $a_1, \dots a_n$ et $d_1, \dots d_n$ des réels positifs

$(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq (d_1 + \dots + d_n)\left(\frac{a_1^2}{d_1} + \dots + \frac{a_n^2}{d_n}\right)$

Exercice 3. Gram-Schmidt

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[x]$, des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, on considère une forme bilinéaire

$$\beta(P,Q) = P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

où $P = a_0 + a_1 x$ et $Q = b_0 + b_1 x$ avec a_0, a_1 et b_0, b_1 des réels.

1. Montrer que la forme bilinéaire β définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_1[x]$ (on ne demande pas de montrer que β est une forme bilinéaire).
2. Quelle est la matrice de β dans la base $P_1 = 1,\ P_2 = x$?
3. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt trouver $Q \in \mathbb{R}_1[x]$, tels que P_1, Q soient orthogonaux par rapport à β.
4. Quelle est la matrice de β dans la base (P_1, Q) ?

1. β est symétrique : $\beta(P,Q) = \beta(Q,P)$ et défini positif :
$\beta(P,P) = P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0$ comme la somme des carrés

$\beta(P,P) = 0 \Leftrightarrow P(1) = P(2) = 0 \Rightarrow P$ a deux racines distinctes, mais P est linéaire donc il y a une seule racine possible pour P non-identiquement nul. Donc si $\beta(P,P) = 0 \Rightarrow P \equiv 0$.

2. $$\begin{pmatrix} \beta(P_1,P_1) & \beta(P_1,P_2) \\ \beta(P_2,P_1) & \beta(P_2,P_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

3. $$Q = P_2 - \frac{\langle P_2, P_1\rangle}{\langle P_1, P_1\rangle} \cdot P_1 = x - \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 2}{1\cdot 1 + 1\cdot 1}\cdot 1 = x - \frac{3}{2}$$

4. $$\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ Calcul : $\beta(Q,Q) = \left(1 - \frac{3}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\right) + \left(2 - \frac{3}{2}\right)\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\beta(P_1, Q) = 0 \qquad \beta(P_1, P_1) = 2$

Exercice 4. Projection orthogonale

On considère une application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Pour montrer que ϕ est une projection orthogonale il suffit de montrer que sa matrice satisfait deux propriétés. Lesquelles ? (On ne demande pas de justification).
2. Montrer que la matrice P est une matrice de projection orthogonale sur une droite. On notera cette droite D.
3. Écrire l'équation de la droite D sous la forme $ax + by = 0,\ a, b \in \mathbb{R}$.
4. Calculer la projection orthogonale des vecteurs u et v dont les coordonnées sont $(1, -1)$ et $(1, 1)$ respectivement.
5. Trouver une base dans laquelle la matrice de ϕ est

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Est-ce que cette base est unique ? Sinon, comment on décrit les vecteurs $\{f_1, f_2\}$ d'une telle base ?
7. Quelle est le lien entre les matrices P, H et la base $\{f_1, f_2\}$?

1. La matrice P d'une proj. orthogonale satisfait $P^2 = P$ et ${}^tP = P$

2. Ici $P^2 = P$ et ${}^TP = P$
Donc c'est une projection orthogonale

L'image de φ est $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Donc c'est une droite portée par $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

3. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ est sur la droite D
Donc on a $a \cdot \frac{1}{2} + b\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow a = b$
$\Rightarrow$ l'équation de la droite $\boxed{x + y = 0}$

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto P\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Cette base n'est pas unique le premier vecteur sur la droite orthogonale à la droite D et le deuxième sur la droite D

7. Si les vecteurs $f_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $f_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

On a la matrice de passage $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = C$

Donc $P = C\,H\,C^{-1}$

Exercice 3. Gram-Schmidt

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$, des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère une forme bilinéaire

$$\beta(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

où $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ et $Q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ avec a_0, a_1, a_2 et b_0, b_1, b_2 des réels.

1. Montrer que la forme bilinéaire β définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$ (on ne demande pas de montrer que β est une forme bilinéaire).
2. Quelle est la matrice de β dans la base $P_1 = 1,\ P_2 = x,\ P_3 = x^2$?
3. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt trouver $Q, R \in \mathbb{R}_2[x]$, tels que P_1, Q, R soient orthogonaux deux-à-deux par rapport à β.
4. Combien y a-t-il d'entrées nulles dans la matrice de β dans la base (P_1, Q, R) ? Justifier.

1. β - symétrique. En effet, $\beta(P,Q) = \beta(Q,P)$

2. Défini positif :

$\beta(P,P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0$ en tant que somme des carrés

si $\beta(P,P) = 0$ cela signifie que 0, 1 et 2 sont des racines de P. Or P est d'ordre 2. Donc P a au plus deux racines distinctes. Pour être 0 en trois points P doit être identiquement nulle.

2]

	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$
$P_1 = 1$	1	1	1
$P_2 = x$	0	1	2
$P_3 = x^2$	0	1	4

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix}}$$

Calculs :

$$\begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot0+1\cdot1+1\cdot2 & 1\cdot0+1\cdot1+1\cdot4 \\ & 0\cdot0+1\cdot1+2\cdot2 & 0\cdot0+1\cdot1+2\cdot4 \\ & & 0\cdot0+1\cdot1+4\cdot4 \end{pmatrix}$$

3]

$$Q = P_2 - \frac{\langle P_2,P_1\rangle}{\langle P_1,P_1\rangle} P_1 = x - \frac{0\cdot1+1\cdot1+1\cdot2}{1\cdot1+1\cdot1+1\cdot1}\cdot 1 = \underline{x-1}$$

$$R = P_3 - \frac{\langle P_3,P_1\rangle}{\langle P_1,P_1\rangle}P_1 - \frac{\langle P_3,Q\rangle}{\langle Q,Q\rangle}Q = x^2 - \frac{0\cdot1+1\cdot1+4\cdot1}{3}\cdot 1$$

$$- \frac{0\cdot(0-1)+1\cdot(1-1)+4\cdot(2-1)}{(0-1)(0-1)+(1-1)(1-1)+(2-1)(2-1)}\cdot(x-1)$$

$$= x^2 - \frac{5}{3} - \frac{4}{2}(x-1) = \underline{x^2 - 2x - \frac{1}{3}}$$

4] Comme P_1, Q et R sont orthogonaux 2-à-2 la matrice n'a que les termes non-nuls sur la diagonale. Donc, il y a 6 entrées nulles