Algèbre IV – CF 21.05.2021
Corrigé.

Exercice 1. Vrai ou faux (4 pts) Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vrai ou fausse. Justifier votre réponse, en donnant une preuve courte (moins d'un paragraphe), en citant un théorème du cours, ou en donnant un (contre-)exemple, selon le cas.

1. Il existe une matrice $C \in O(3, \mathbb{R})$ ayant -1 comme valeur propre.
2. Il existe une matrice $D \in O(3, \mathbb{R})$ ayant $1/2$ comme valeur propre.
3. Soit A une matrice 5×5 à coefficients réels. Soit $X, Y \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}$, tels que $A = {}^tA$, $AX = 3X$ et $AY = Y/17$. Alors $X \perp Y$.
4. Il existe une matrice $A \in GL(2, \mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. $\boxed{\text{Oui}}$ Par exemple une matrice de symétrie orthogonale par rapport au plan xy :
$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a $C^{-1} = C^t$.

2. $\boxed{\text{Non}}$ Soit λ une valeur propre de A et v un vecteur propre correspondant.
D est une isométrie par définition de $O(3,\mathbb{R})$
Donc en particulier $\langle Dv, Dv\rangle = \langle v, v\rangle$
Si $Dv = \lambda v$ alors $\langle Dv, Dv\rangle = \lambda^2 \langle v, v\rangle$
Donc $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$, $\lambda \neq \frac{1}{2}$

3. $\boxed{\text{Oui}}$ $A = {}^tA$ – matrice symétrique. Par le théor. spectral les espaces propres de A sont orthogonaux. Ici X et Y sont des vect. propres des valeurs propres différentes (3 et 1/17)
Donc $X \perp Y$!

4. $\boxed{\text{Non}}$ La matrice ${}^tA A$ est symétrique de dét. positif car $\det {}^tA = \det A$ et
$\det {}^tAA = \det {}^tA \cdot \det A = (\det A)^2 \geq 0$
mais $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3 < 0$

Exercice 2. (7 pts)

1. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que M est orthogonale.

   (b) Trouver une valeur propre réelle, que l'on notera λ, et un vecteur propre de norme 1, que l'on notera v.

   (c) La matrice M a-t-elle des vecteurs propres non colinéaires à v ?

2. Nous admettons que M est semblable à une matrice de la forme

$$N = \begin{pmatrix} R_\theta & \\ & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

   Autrement dit, nous admettons qu'il existe une matrice $P \in GL(3,\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = N$. Trouver z et $\cos\theta$.

3. Justifier l'existence d'une telle matrice P (vous pouvez le faire en trouvant une telle matrice, ou par un autre argument, pourvu qu'il soit bien justifié).

1a) On peut m.q M est orthogonale de façons différentes. Directement ${}^tM = M^{-1}$, i.e. montrer que ${}^tM \cdot M = Id$, ce qui revient aussi à une remarque que les colonnes de M forment une base orthonormée. Ce qu'on vérifie facilement.

1b) M étant la matrice orthogonale les valeurs propres de M sont forcement 1 ou -1 (voir l'exo 1.1)

Donc on peut directement vérifier laquelle : $\lambda = 1$ donne $M - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & -2 \\ 1 & 2-3 & 2 \\ 2 & -2 & 1-3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ la première colonne est égale à la deuxième à signe près $\Rightarrow \det M - I \neq 0 \Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(M-I) \neq \emptyset \Rightarrow 1$ est une valeur propre.

le vect. propre $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ doit alors satisfaire

$(M - I)v = 0$ $\begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y - 2z \\ x = y + z \end{cases}$

$\tilde{v} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}$

-1 n'est pas une valeur propre car on a $M+I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+3 & 1 & -2 \\ 1 & 2+3 & 2 \\ 2 & -2 & 1+3 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 5\cdot 24 - 1\cdot 0 + 2\cdot 12 \neq 0$

1c) la reponse est non car la seule valeur propre réelle est 1. Cette valeur propre est de multiplicé 1 car $\dim \operatorname{Ker}(M - Id) = 1$. Comme il n'y a pas d'autres valeurs propres réelles, il n'y a pas d'autres vecteurs propres à part ceux colinéaires à v.

2. On a établi que la seule valeur propre de M est 1. C'est exactement la valeur de 2.

$\operatorname{tr} M = 2\cos\theta + 1 = \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{1}{3}}$

3. La matrice M laisse la droite porté par v inchangé et sur les vecteurs orthogonaux à v M agit en isométrie $\langle Mx, My\rangle = \langle x, y\rangle$. Les isométries du plan sont des symétries ou des rotations.

Vu que ici il n'y a pas de vecteurs propres dans ce plan - c'est une rotation qui s'écrit dans une base adaptée du plan comme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

P - est une matrice de passage de la base canonique vers une base orthonormée formée de deux vecteurs orthonormaux du plan et v comme troisième vecteur.

P est orthogonale en tant que matrice de passage entre deux B.O.N.

Exercice 3. (10 pts) On considère une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^3$ le plan engendré par les colonnes de A.

1. Trouver une base orthonormée $(f_1,\ f_2)$ du plan $\mathcal{P}$ telle que le vecteur f_1 soit colinéaire avec la premiere colonne de A.
2. On note U la matrice 3×2 dont les colonnes sont f_1 et f_2. Justifier sans calcul que ${}^tU \cdot U = I$.
3. Justifier sans calcul que $B = U \cdot {}^tU$ est symétrique.
4. Calculer B explicitement.
5. Trouver un vecteur f_3 tel que les vecteurs $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
6. Calculer Bf_i pour $i = 1, 2, 3$.
7. On considère un vecteur quelconque $g \in \mathbb{R}^3$. On note $h = Bg$. Montrer que le vecteur h est dans le plan $\mathcal{P}$.
8. On note $v = g - h$. Montrer que v est orthogonal à chaque colonne de U.
9. Montrer que $v \in \mathcal{P}^\perp$.
10. $*$ Bonus : Que peut-on dire de l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est B ?

1. $f_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}$ et $\tilde{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f_2 = \dfrac{\tilde{f}_2}{\|\tilde{f}_2\|} = \boxed{\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}$

2. $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$. On a $U = (f_1\ f_2)$

${}^tU \cdot U = \begin{pmatrix} {}^tf_1 \cdot f_1 & {}^tf_1 \cdot f_2 \\ {}^tf_2 \cdot f_1 & {}^tf_2 \cdot f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $B = U \cdot {}^tU$. ${}^tB = {}^t(U \cdot {}^tU) = {}^t({}^tU) \cdot {}^tU = U \cdot {}^tU = B$

4. $$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{4}{9} & \frac{1}{2} - \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ & \frac{1}{2} + \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ & & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/18 & 1/18 & 4/18 \\ 1/18 & 17/18 & -4/18 \\ 4/18 & -4/18 & 2/18 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 17 & 1 & 4 \\ 1 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}}$$

5. On prend un vecteur qui n'est pas dans $\mathcal{P}$. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et puis Gram-Smidt donne :

$$\tilde{f}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - 1/2 - 4/9\\ 0 - 1/2 + 4/9\\ 0 - 0 - 2/9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/18\\-1/18\\-4/18\end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

$$f_3 = \frac{\tilde{f}_3}{\|\tilde{f}_3\|} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix} \Big/ \sqrt{1+1+4^2} = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}} \quad \left(\sqrt{18} = \sqrt{2}\cdot 3, \quad \frac{\sqrt{18}}{18} = \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

6. $B f_1 = U\,{}^tU f_1 = (f_1\ f_2)\begin{pmatrix}{}^tf_1 f_1\\ {}^tf_2 f_1\end{pmatrix} = (f_1\ f_2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f_1$.

$B f_2 = f_2$ et $B f_3 = 0$ par un calcul similaire

7. (f_1, f_2, f_3) est une b.o.n. de $\mathbb{R}^3$

donc $g = a f_1 + b f_2 + c f_3$ a, b, c : coeffs réels

$Bg = a f_1 + b f_2 \in P$

8. On a donc $v = g - Bg = c f_3$

Par construction $c f_3 \perp f_1$ et $c f_3 \perp f_2$

9. Comme (f_1, f_2) engendre P et en particulier les colonnes de A sont les combinaisons linéaires de (f_1, f_2) on a $v \perp$ aux colonnes de A

10. L'application B est une projection orthogonale sur le plan $P = \operatorname{Im} B = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$

En effet, $B^2 = B$ car $U \underbrace{{}^tU\,U}_{I}\,{}^tU = U\,{}^tU$ et ${}^tB = B$.