CC2 - algèbre IV - 2021 - corrigé

Exercice 1. Vrai ou faux

Indiquer si la proposition est vraie ou fausse. Justifier votre reponse - donner une preuve courte (moins d'un paragraphe). Si une proposition est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.

1. Si deux matrices réelles A et B sont orthogonales, alors $A + B$ est orthogonale.
2. L'opération de multiplication des matrices définit une structure de groupe sur l'espace des matrices réels 2×2.
3. Un endomorphisme orthogonal et diagonalisable d'un espace euclidien est l'identité ou une symétrie orthogonale.

1. NON matrices orthogonales : $A^{-1} = {}^TA$ et $B^{-1} = {}^TB$
on a ${}^T(A+B) = {}^TA + {}^TB$
mais $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ en générale

2. NON Pour que un ensemble soit un groupe il faut que tout élément a un inverse.
L'identité pour multiplication est la matrice identité, or les matrices noninversibles n'ont pas d'inverse.

3. OUI Soit A - orthogonale $\Rightarrow$ valeurs propres réelles sont ± 1 (cours
mais aussi si x - vect. propre, comme A est une isométrie $\langle x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle$, si $Ax = \lambda x$
on a $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$).
Orthogonal : $A^{-1} = {}^TA$. symétrique - il faut m.q. ${}^TA = A$
Diagonalisable : $A = P^{-1}DP$. On remarque, que $A^{-1} = (P^{-1}DP)^{-1}$
$= P^{-1}D^{-1}P$
mais si D n'a que ± 1
$D^{-1} = D$, donc
$A^{-1} = A$
alors
${}^TA = A^{-1} = A$!
q.e.d.

Exercice 2. Rotation de $\mathbb{R}^3$

On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté par la base canonique $\mathcal{B}$. Soit ρ la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe orienté et dirigé par le vecteur $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\pi/2$.

1. Écrire la matrice de ρ dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}'$ dont le dernier vecteur est $\frac{w}{\|w\|}$.
2. Expliciter une telle base $\mathcal{B}'$ et donner P, la matrice orthogonale de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.
3. Montrer que 1 est une valeur propre de ρ.
4. Y-a-t-il d'autres valeurs propres réelles de ρ ? Si oui, lesquelles ?
5. Décrire les espaces invariants de ρ.
6. Quelle est l'équation du plan invariant par ρ ?

1. $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\pi/2 & 0 \\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Il suffit de trouver une base orthonormée dont $\frac{W}{|W|}$ - le dernier vecteur.

On peut prendre (v_1, v_2, v_3) comme base où $v_1 = W/|W|$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et faire le procédé Gram-Schmidt pour l'orthonormaliser

On a $v_2 \perp v_1 \Rightarrow \tilde{v}_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\hat{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{v}_3 = \frac{\hat{v}_3}{|\hat{v}_3|} = \frac{1}{\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

3. le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ρ avec la valeur propre 1. En effet, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne bouge pas sous la rotation ρ autour de w

4. Il n'y a pas d'autre valeurs propres réelles car à part de vecteurs sur l'axe de rotation tout autre vecteur tourne donc ne satisfait pas d'équation $\rho(v) = \lambda v$ pour aucun $\lambda \in \mathbb{R}$

5. L'axe porté par w et aussi le plan orthogonal à l'axe de rotation sont deux espaces invariants

6. Ce plan est orthogonal à w. Donc l'équation est $-x-y+z=0$

Exercice 3. Base duale

Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\{e_1, e_2\}$ une base de E et (e_1^*, e_2^*) la base duale de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ Soient f_1^*, f_2^* les formes linéaires sur E définies par

$$f_1^* = e_1^* + 2e_2^*, \ f_2^* = e_1^* - e_2^*$$

Montrer que (f_1^*, f_2^*) est une base de E^* et déterminer la base (f_1, f_2) de E, dont (f_1^*, f_2^*) est la base duale.

La matrice de passage de $(e_1^*; e_2^*)$ vers $(f_1^*; f_2^*)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Le $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow (f_1^*, f_2^*)$ forme une base. Soit $f_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $f_2 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

On cherche $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ t.q.

$$\begin{cases} f_1^*(f_1) = 1 \\ f_2^*(f_2) = 1 \\ f_1^*(f_2) = 0 \\ f_2^*(f_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (e_1^* + 2e_2^*)(xe_1 + ye_2) = 1 \\ (e_1^* - e_2^*)(ue_1 + ve_2) = 1 \\ (e_1^* + 2e_2^*)(ue_1 + ve_2) = 0 \\ (e_1^* - e_2^*)(xe_1 + ye_2) = 0 \end{cases}$$

On a
$e_1^*(e_1) = 1$
$e_1^*(e_2) = 0$
$e_2^*(e_2) = 1$
$e_2^*(e_1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ u - v = 1 \\ u + 2v = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \\ u = 2/3 \\ v = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_1 &= \tfrac{1}{3} e_1 + \tfrac{1}{3} e_2 \\ f_2 &= \tfrac{2}{3} e_1 - \tfrac{1}{3} e_2 \end{aligned}}$$

Exercice 4.
On considère l'espace vectoriel de polynômes de degré au plus 1 :

$$\mathbb{R}_1[X] = \{a_1 X + a_0, \quad \text{où } a_0, a_1 \in \mathbb{R},\}$$

muni du produit scalaire $< P(X), Q(X) >= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\text{x}$.

1. La base $\mathcal{B} = (1, X)$ est-elle orthonormée pour ce produit scalaire?
2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_1[X]$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

   Trouver $f(1)$ et $f(X)$.
3. Comparer $\|1\|$ et $\|f(1)\|$. L'endomorphisme f est-il orthogonal? Justifiez.
4. L'endomorphisme f est-il symétrique? Justifiez.

1\. $\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx = 2$ – pas normée

$\langle 1, x\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\, dx = 0$ – orthogonale

$\langle x, x\rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

2\. $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2/\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2\sqrt{3} \cdot X$

$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2/\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = 2\sqrt{3} + 0 \cdot X$

3\. $\|1\| = \sqrt{2}$ $\quad \|f(1)\|^2 = \int_{-1}^{1} (1 + 2\sqrt{3}x)^2 dx$

$= \int_{-1}^{1} (1 + 4\sqrt{3}x + 12x^2)\, dx$

$= \left[x + \frac{4\sqrt{3}}{2}x^2 + 12\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2 + 0 + 8 = 10$

On voit que $\|1\| = \sqrt{2}$ et $\|f(1)\| = \sqrt{10}$
Donc f ne preserve pas les longueurs $\Rightarrow$
f n'est pas orthogonal

4\. Il suffit de verifier que $\langle f(1), X\rangle = \langle 1, f(X)\rangle$ pour conclure que f est symétrique. En effet,
$\langle f(1), X\rangle = \int_{-1}^{1} (1 + 2\sqrt{3}x)x\, dx = 0 + 4\sqrt{3}$, $\langle 1, f(X)\rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 2\sqrt{3}\, dx = 4\sqrt{3}$