4.02.2021 Algèbre IV. Discussion   Olga KRAVCHENKO

7.) On a dit que les formes bilinéaires forment un espace vectoriel. Notons le $\mathcal{B}$.

Si on considère les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$ quelle est la dimension de cette espace $\mathcal{B}$? Y-a-t-il plus de formes bilinéaires symétriques ou antisymétriques dans le monde?

$\mathbb{R}^2$ $\boxed{B(x,y) = {}^T x A y}$ $\{e_1, e_2\}$ - base de $\mathbb{R}^2$

$x, y \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_1,e_2) \\ B(e_2,e_1) & B(e_2,e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Espace de formes bilinéaires:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'esp. des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$ est de dim. 4.

$B(x,y) = B(y,x)$ - symétrique

$B(x,y) = -B(y,x)$ - anti-symétrique

$A = {}^T A$ - symétrique

$A = -{}^T A$ - anti-symétrique

$$B(x,y) = \underbrace{\frac{B(x,y)+B(y,x)}{2}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{B(x,y)-B(y,x)}{2}}_{\text{anti-sym.}}$$

$$A = {}^{T}A \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=a \\ b=c \\ c=b \\ d=d \end{matrix}$$

Base de sous-esp. des matrices symétriques 2×2 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim \mathcal{B}_{sym} = 3$ - formes bilinéares sym.

$$A = -{}^{T}A \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a = -a \\ d = -d \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow a = d = 0$$

$b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ - dim 1

$$\tilde{B}(x,y) = \frac{B(x,y)+B(y,x)}{2} \qquad \tilde{B}(x,y) = \frac{B(x,y)-B(y,x)}{2}$$

$$\tilde{B}(y,x) = \frac{B(y,x)+B(x,y)}{2} \qquad \tilde{B}(y,x) = \frac{B(y,x)-B(x,y)}{2}$$

$$\tilde{B}(y,x) = -\tilde{B}(x,y)$$

Questions pour le Chapitre I : 1.7–1.9

1 On considère l'espace $\mathbb{R}^2$ avec une base choisi. Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$.

a) Soit $B(x,y) = 5x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 2x_2y_2$

Ecrire sa matrice

Ecrire la forme quadratique corresp.

$$Q(x) := B(x,x) = 5x_1x_1 + \underbrace{3x_1x_2 + 3x_2x_1}_{6x_1x_2} - 2x_2x_2$$

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x) \qquad = 5x_1^2 + 6x_1x_2 - 2x_2^2$$

$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ Matrice d'une forme quadratique = Matrice d'une forme bilinéaire symétrique corresp.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice d'une forme bilinéaire β. Quelle est la forme quadratique q correspondante?

Ecrire $q(x)$ sans avoir écrit β.

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = -3x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 = {}^TX \cdot A \cdot X$$

Formes quadratiques $\longleftrightarrow$ Formes bilinéaires symétrique

---

Norme : $N : E \to \mathbb{R}_+$

- $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ – homogénité

– $N(x+y) \leq N(x)+N(y)$ – l'inégalité triangulaire

2. Pourquoi on est sûre que la norme $\|x\|_1 = |x_1|+|x_2|$ dans $\mathbb{R}^2$ ne provient pas d'un produit scalaire quelconque? Qu'il n'existe pas de produit scalaire $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.q. $\|x\|_1 = \sqrt{\beta(x,x)}$?

$$\|x\| = \sqrt{B(x,x)}$$

$$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$$

Produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$$|x_1| + |x_2| \overset{?}{=} \sqrt{B(x,x)}$$

$$\underline{\big((|x_1|+|x_2|)(|x_1|+|x_2|)\big)} = \underbrace{B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)} = Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$Q(x) := B(x,x)$$

$Q(x) \rightsquigarrow B(x,y)$ symétrique ?

$$B(x,y) = \frac{Q(x+y) - Q(x-y)}{4}$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – canonique

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (x_1 e_1 + x_2 e_2) \cdot (y_1 e_1 + y_2 e_2)$$
$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

$\langle e_1, e_1\rangle = 1$
$\langle e_1, e_2\rangle = 0$
$\langle e_2, e_2\rangle = 1$
$\Bigg\}$ produit scalaire standard (usuel)

Ex. $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 5x_1y_1 + 2x_2y_2$

positivité $\langle x, x\rangle \geq 0$

Ex. $\langle x, y\rangle = {}^T x A y = {}^T x \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y$
$= 5x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2$

A - symétrique

$\det A > 0$, $\det A \neq 0$ $\quad \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

3. On a une forme bilinéaire symétrique B. On a une forme quadratique Q correspondante :

$Q(x) = B(x, x)$

Qu'est ce qu'il faut demander pour de B pour que on puisse définir une norme associée ?

<u>Norme</u> (1) $\underline{\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0}$

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ← homogénité

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Pourquoi?

$x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$?

$0 = x = \underset{\text{pour } y \text{ qqnq}}{0 \cdot y} \overset{(2)}{\Rightarrow} \|x\| = \|0 \cdot y\| = 0 \cdot \|y\| = 0$

$\|x\| = \sqrt{B(x,x)}$ alors $B(x,x) \geq 0$ positive

$\|x\| = 0 \overset{\text{il faut}}{\Longrightarrow} x = 0$

$\sqrt{B(x,x)} = 0 \Longleftrightarrow B(x,x) = 0$ alors cela implique B définie.

$\|\lambda x\| = \sqrt{B(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 B(x,x)} = |\lambda| \cdot \sqrt{B(x,x)} = |\lambda| \|x\|$

Inég. triang. ? — à suivre

4. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}_+$ un produit scalaire. Pourquoi alors on a une inégalité triangulaire pour la norme associée ?
<u>indication</u> : C'est liée à l'inégalité Cauchy-Schwarz.

Soit $\langle x, y \rangle$ - une forme <u>bilin. symétrique positive</u>

Alors $\langle x, y \rangle \cdot \langle x, y \rangle \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

$$\boxed{|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle}$$

Si en plus $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soit défini on a Cauchy-Schwarz égalité <u>ssi</u> x et y sont <u>colinéaires</u>

$(\exists \lambda \text{ t.q } x = \lambda y)$

$$|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle \quad (*)$$

Soit $x = \lambda y$ alors on montre $(*)$

$$\langle \lambda y, y\rangle = \lambda \langle y, y\rangle$$

$$|\langle \lambda y, y\rangle|^2 = \lambda^2 \langle y, y\rangle^2 = \lambda^2 \langle y, y\rangle \langle y, y\rangle$$

$$= \langle \lambda y, \lambda y\rangle \langle y, y\rangle$$

linéarité

$$= \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

Cauchy-Schwarz marche pour une forme bilinéaire symétrique positive.

5. Montrer que pour un produit scalaire $\langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$ implique que x et y sont colinéaires?

6. Exemple d'utilisation de Cauchy-Schwarz pour montrer des inégalités pour des nombres :

Si x, y, z sont trois réels t.q. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$. Montrer que

$$(x+y+z)^2 \leq \frac{11}{6}$$