Session 28.01 sur zoom 11h-12h12

Matrice de passage?

$\{e_1, e_2\} \to \{f, g\}$

$xe_1 + ye_2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow ?$

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$

Question : on change de quelle base vers quelle base? Ce n'est pas plutôt l'inverse?

$f = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2) \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2$

$g = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\vec{v} = v_1 \vec{f} + v_2 \vec{g}}$

Supposons qu'on connait $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ - coordonnées dans la base $\{f, g\}$

$\vec{v} = \underbrace{(\vec{f}\ \vec{g})}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{(\vec{e}_1\ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Matrice de passage $P = \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2) \underbrace{P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Algèbre IV   Questions pour les parties 1.1.–1.6

1) On peut formuler la linéarité par une seule condition : $\forall x, y, z \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$(*) \quad \boxed{B(x, y+\lambda z) = B(x,y) + \lambda B(x,z)}$$

Est-ce que cette formulation est équivalente à celle utilisée en cours avec deux conditions :

$$(**) \quad \boxed{\begin{cases} B(x, y+z) = B(x,y) + B(x,z) & (1) \\ B(x, \lambda y) = \lambda B(x,y) & (2) \end{cases}}$$

Si oui – montrez l'équivalence.

$* \Rightarrow **$ $\qquad \lambda = 1 \Rightarrow 1$

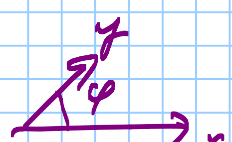
$\qquad \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow (2)$

$B(x,0) = B(x, 0\cdot v) = 0 \cdot \underbrace{B(x,v)}_{=0}$

$(**) \Rightarrow *$

$$B(x, y+\lambda z) \overset{(1)}{=} B(x,y) + B(x, \lambda z) \overset{(2)}{=} B(x,y) + \lambda B(x,z)$$

2) Dans l'exemple de produit scalaire



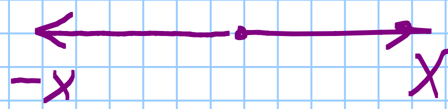
$$\langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cos\varphi$$

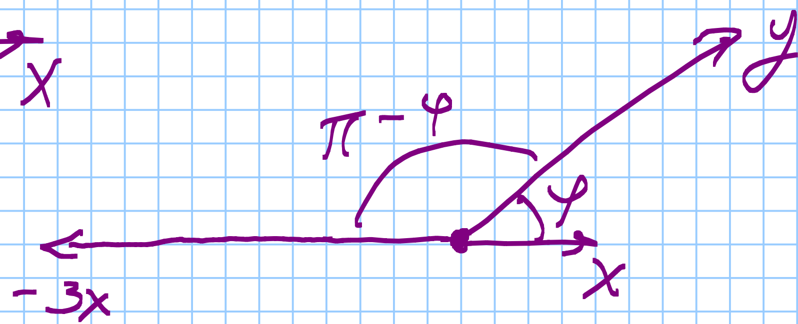
On voit que pour $\lambda > 0$

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$$

Qu'est ce que ce passe pour $\lambda < 0$?

A-t-on toujours le propriété $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$





$$\langle x, y\rangle = |x||y|\cdot\cos\varphi \qquad \lambda\in\mathbb{R}_+,\ -\lambda<0$$

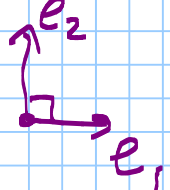
$$\langle -\lambda x, y\rangle = |-\lambda x|\,|y|\cdot\cos(\pi-\varphi)$$

$$= -|-\lambda\cdot x||y|\cos\varphi$$

$$= -|-\lambda|\cdot|x|\cdot|y| \qquad = -\lambda|x||y|\cos\varphi$$

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha|x||y|\cos\varphi = \alpha\langle x,y\rangle$$

3) Pourquoi la matrice de produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$? Dans quelle base? Qu'est ce qu'on demande de la base? $B(x,y)=\langle x,y\rangle = |x||y|\cos\varphi$



$$B(e_1,e_1) = B(e_2,e_2) = 1$$

$$B(e_1,e_2) = B(e_2,e_1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_1,e_2)\\ B(e_2,e_1) & B(e_2,e_2)\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = A$$

Base Orthonormée.

4) Changement de base?

On dit qu'on passe de la base $\{e_1, e_2\}$ vers la base $\{f, g\}$

Qu'est ce que cela signifie?

Qu'est ce que la matrice de passage?

$$\{e_1, e_2\} \longrightarrow \{f, g\} \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

coords. dans la base $\{e_1, e_2\}$

$$P = \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}$$

f g dans la base $\{e_1, e_2\}$

Soit A la matrice d'une forme bilinéaire B dans la base $\{e_1, e_2\}$

Trouver la matrice A' dans la base $\{f, g\}$

x, y - vecteurs dans $\mathbb{R}^2$

$$B(x, y) = {}^T x A y$$

soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dans la base $\{e_1, e_2\}$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ — " —

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$ où $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ - coord. de X dans la base $\{f, g\}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$ où $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ — " — y — " —

$$B(\underset{=}{x},y) = {}^T x\, A\, y$$
$$= (x_1 x_2) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = {}^T\left(P \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}\right) A \left(P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= {}^T\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \underbrace{{}^T P A P} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{{}^T(MN) = {}^T N \cdot {}^T M}$$

$$(M \cdot N) R = M (N R)$$
associtivité

$A' = {}^T P A P$ – matrice de B dans la base $\{f, g\}$

5) Pour $\mathbb{R}^2$ donner des exemples des formes bilinéaires suivantes :

- pas symétrique
- symétrique mais pas positive
- symétrique, positive mais pas défini.

Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$B(x,y) = 2 x_1 y_2 + 3 x_2 y_2$$
$$= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Il suffit que la matrice A ne soit

pas symétrique pour que la forme bilinéaire corresp.

$B(x,y) = {}^T x A y$ soit pas symétrique

$B(x,y) \neq B(y,x)$

---

symétrique pas positive

$B(x,y) = -(x \cdot y) = -{}^T x \cdot y$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$B(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

positivité de B.

$B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = -xx' - yy'$

$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_2 + x_2 y_1$

$B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -2 < 0$

$B(x,x) = -x^2 - x$

$\Rightarrow$ symétrique, positive mais pas définit.

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

Défini :

$$\underline{B(x, x) = 0} \implies x = 0$$

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 \geq 0$$

positive

$$B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 3 x_1 y_1 = B\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \text{ - symétr.}$$

pas définie car par exemple

$$B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6) Y-a-t-il des fautes dans le cours ? (J'ai remarqué une — dans la terminologie : formes bilinéaire sont appelées à un moment .....?)

7.) On a dit que les formes bilinéaires forment un espace vectoriel. Notons le $\mathcal{B}$.

Si on considère les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$ quelle est la dimension de cette espace $\mathcal{B}$

Y-a-t-il plus de formes bilinéaires symétriques ou antisymétriques dans le monde ?