

Feuille n° 2 : Matrices

Exercice 1 (*) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Parmi les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB , lesquels ont un sens ? Calculez-les.

Exercice 2 On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et BA . Que remarque-t-on ?

Exercice 3

- À tout nombre réel t on associe la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) & \text{sh}(t) \\ \text{sh}(t) & \text{ch}(t) \end{pmatrix}$.
 - Pour $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, montrer que $A(t_1)A(t_2) = A(t_1 + t_2)$.
 - Montrer que $A(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbf{R}$ et calculer $(A(t))^{-1}$.
- Mêmes questions avec la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

Exercice 4

- Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
 - Montrer que $AB = AC$; a-t-on $B = C$? A peut-elle être inversible ?
 - Déterminer toutes les matrices F telles que $AF = 0$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.

Exercice 5 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer ensuite que A est inversible et calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 7 (*)

- Soit $m \geq 1$ un entier et $A, B \in M_m(\mathbf{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \geq 3$. Idem avec $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 Soit m un réel non nul. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer $(A + I)(A - 2I)$.
- Soit $B = \frac{1}{3}(A + I)$ et $C = \frac{1}{3}(A - 2I)$. Calculer B^2 et C^2 . En déduire une expression simple de B^n et C^n pour tout entier $n \geq 1$.
- En déduire que pour tout entier $n \geq 1, A^n = 2^n B + (-1)^{n+1} C$.

Exercice 9 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1} .

Exercice 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2, A^3 et $A^3 - A^2 + A - I$.
- Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I, A et A^2 .
- Exprimer A^4 et A^5 en fonction de I, A , et A^2 .
- Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il existe a_n, b_n, c_n tels que $A^n = a_n I + b_n A + c_n A^2$.

Exercice 11 Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse (en fonction de B).

Exercice 12 Soit A, B deux matrices carrées telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 13 Soit n un entier, K un corps et A une matrice telle que pour tout $B \in M_n(K)$ on ait $AB = BA$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $A = \lambda I$.

Exercice 14 (*) Les matrices suivantes sont-elles échelonnées ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 47 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 (*) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée (en lignes) et déterminer une base de leur noyau :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 (*) Calculer, lorsqu'ils existent, les inverses des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbf{C}); \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 (*) Déterminer sous quelles conditions les systèmes suivants admettent une solution :

$$\begin{cases} x - y + 2z + 2t = a \\ 2x + y - z + 2t = b \\ x + y + 2t = c \\ y + z + 2t = d \end{cases}; \begin{cases} y + z = a \\ x + z = b \\ x + t = c \end{cases}$$

Exercice 18 Résoudre, en fonction du paramètre $m \in \mathbf{C}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}; \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}; \begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases}$$

Exercice 19 (*)

Déterminer noyau et image des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20

1. On considère l'application linéaire $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, -3x + 3y).$$

Écrire sa matrice dans la base canonique de \mathbf{R}^2 et déterminer son noyau et son image.

2. Même question avec $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ définie par

$$g(x, y, z) = (x - z, 2x + y - 3z, -y + 2z).$$

3. Même question avec $h : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ définie par

$$h(x, y, z, t) = (2x + 2y - z + 7t, 4x + 3y - z + 11t, -y + 2z - 4t, 3x + 3y - 2z + 11t).$$