Feuille n° 1 : Révisions

Nombres réels et suites

Exercice 1 (∗) Déterminer (lorsqu'elles existent) les bornes inférieures et supérieures ainsi que les maxima et minima de chacun des ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 < 2\} \quad ; \quad B = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbf{N}^*\right\} \quad ; \quad C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \ : \ n, p \in \mathbf{N}^*\right\}.$$

Exercice 2

1. Pour $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, montrer que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$.
2. Déterminer $\inf \left\{(x_1 + \cdots + x_n) \times \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \ : \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^{+*}\right\}$. Cet infimum est-il un minimum ?

Exercice 3 Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une application bornée. Montrer que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \inf_{y \in \mathbf{R}} f(x, y) \leqslant \inf_{y \in \mathbf{R}} \sup_{x \in \mathbf{R}} f(x, y).$$

Exercice 4 (∗) Soit $f : [0; 1] \to [0; 1]$ une application croissante.

1. Montrer que l'ensemble $E = \{x \in [0; 1] \mid f(x) \leqslant x\}$ admet une borne inférieure b.
2. Montrer que $f(b) = b$.

Exercice 5 (∗) Déterminer la nature et la limite éventuelle des suites u, v et w de termes généraux

$$u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2} \quad ; \quad v_n = e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + n + e^n) \quad \text{et} \quad w_n = \sqrt{n} \ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right).$$

Exercice 6 Montrer que la suite de terme général $w_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$ diverge.

Exercice 7 Étudier la suite définie récursivement par $u_0 \in \mathbf{C}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n - 2\overline{u_n})$.

Exercice 8 Soit $a \in \mathbf{C}$ et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbf{C}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = a u_n^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 9 Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

1. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite. Montrer que u converge.
2. Donner un exemple de suite telle que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent mais pas $(u_n)_n$.
3. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que u converge.

Exercice 10 (∗) Soit u une suite. On définit une suite S par $S_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$.

1. (a) On suppose que u tend vers 0. Montrer qu'alors $S_n \longrightarrow 0$.
   (b) En déduire que, si u est convergente, alors S converge et a la même limite que u.
2. Si $u_n = (-1)^n$, montrer que la suite S converge.
3. Si $u_n \longrightarrow +\infty$, montrer que $S_n \longrightarrow +\infty$.

Continuité et dérivabilité

Exercice 11 Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, 1[$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 12 Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On suppose que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq kg(x)$.

Exercice 13 (∗) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbf{R}$.

Exercice 14

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
   (b) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Déduire de la question précédente que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 15

1. Montrer que $x \mapsto x \ln x$ est uniformément continue sur $]0,1]$.
2. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}_+$.
3. Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
4. Soit $f : [0,1[\to \mathbf{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 16 Déterminer en quels points les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée.

$$f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto (1+|x|)e^{-|x|} \quad ; \quad f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 17 ($*$) Soit $n \in \mathbf{Z}$. On définit $f_n : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^n \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur n la fonction f_n est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. À quelle condition sur n ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. À quelle condition sur n cette dérivée est-elle continue en 0 ?

Exercice 18 ($*$)

1. Montrer que l'équation (E) : $2\ln x - x + 2 = 0$ en $x \in \mathbf{R}_+^*$ admet une unique solution sur $[2, +\infty[$.
   On note a cette solution. Vérifier que de plus $a \in]5,6[$.
2. Afin de déterminer une approximation de a, on introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où $\varphi : [2,+\infty[\to [2,+\infty[$ est définie par $\varphi(x) = 2\ln x + 2$ pour tout $x \geqslant 2$.
   (a) i. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [5,6]$.
       ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
       iii. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et que sa limite est a.
   (b) i. Montrer que, pour tout $x \in [5,6]$, $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{5}$.
       ii. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
       $$|u_{n+1} - a| \ \leqslant\ \frac{2}{5}\ |u_n - a|.$$
       iii. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   (c) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Fonctions trigonométriques

Exercice 19 ($*$) Calculer les quantités suivantes :

1. $\operatorname{Arcsin}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$
4. $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)\right)$
5. $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\dfrac{82\pi}{11}\right)\right)$
6. $\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}(1))$
7. $\operatorname{Argch}(\operatorname{ch}(1-\ln 5))$.

Exercice 20 Soit a et b deux réels strictement positifs. On note θ l'argument du nombre complexe $a+ib$ qui vérifie $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

1. Avec un argument géométrique, montrer que $\theta = \operatorname{Arctan}\dfrac{b}{a}$.
2. En déduire que le réel $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$ est un argument du nombre complexe $(2+i)(5+i)(8+i)$.
3. Calculer également les parties réelle et imaginaire de $(2+i)(5+i)(8+i)$ et en déduire une expression simple de $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.

Exercice 21

1. Calculer $\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right)$.
2. Utiliser le résultat pour trouver les solutions réelles de l'équation :
$$2\ \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = \sqrt{3}\ \operatorname{ch}(5x).$$

Exercice 22 Résoudre le système suivant d'inconnues réelles x et y : $\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = 3 \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 2 \end{cases}$.

Exercice 23 ($*$) Linéarisation

1. Soit $u \in \mathbf{R}$. Exprimer $\operatorname{ch}^5(u)$ en fonction de puissances de e^u puis en fonction de termes du type $\operatorname{ch}(ku)$, $k \in \mathbf{N}$.
2. Même question avec $\operatorname{sh}^4(u)$.

Exercice 24 Montrer que l'équation $\operatorname{Argsh} x + \operatorname{Argch} x = 1$ admet une unique solution réelle, puis la déterminer.

Exercice 25 ($*$) On considère la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}\dfrac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$.

1. Quels sont les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f ?
2. Calculer f' là où elle définie et en déduire une expression plus simple de f.
3. Représenter le graphe de f.