

Feuille 8 : Calcul de primitives

Exercice 1. Primitives usuelles à connaître

$$\begin{array}{lll}
 a) \int (2x^3 - 3x^2 + 4) dx & b) \int \sqrt{x} dx & c) \int \frac{3}{2x+4} dx \\
 d) \int \frac{2}{x^2+1} dx & e) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx & f) \int \sin x dx \\
 g) \int e^{3x+1} dx & h) \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx & i) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx
 \end{array}$$

Exercice 2. Primitives "décalées", à reconnaître

$$\begin{array}{lll}
 a) \int (x^2 - 3x + 4)^5 (4x - 6) dx & b) \int \sin^7 x \cos x dx & c) \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
 d) \int \frac{9x^2 - 6}{x^3 - 2x + 5} dx & e) \int \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 2}} dx & f) \int e^{2x^2 - 4x} (x - 1) dx \\
 g) \int \frac{3}{1 - \sin^2 x} dx & h) \int \frac{2x}{\sqrt{2 - x^2}} dx & i) \int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2 - 4)^4} dx
 \end{array}$$

Exercice 3. Fractions rationnelles

$$\begin{array}{lll}
 a) \int \frac{-2}{2x-5} dx & b) \int \frac{3}{x^2+4} dx & c) \int \frac{2x-5}{2x^2+3} dx \\
 d) \int \frac{4}{(x-1)^5} dx & e) \int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx & f) \int \frac{2}{x(x-1)(x-2)} dx \\
 g) \int \frac{x^4}{x^2-3x+2} dx & h) \int \frac{x^2}{x^3-1} dx & i) \int \frac{3x^2}{1-x^2} dx
 \end{array}$$

Exercice 4. Fonctions circulaires

$$\begin{array}{lll}
 a) \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx & b) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx & c) \int \sin^3 x \cos^2 x dx \\
 d) \int \sin^4 x dx & e) \int \cos(2x) \sin x dx & f) \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \\
 g) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx & h) \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{-\pi}{6}} \frac{2}{\sin x} dx & i) \int \frac{3 \sin x}{1 - \cos^2 x} dx
 \end{array}$$

Exercice 5. Intégration par parties

$$\begin{array}{lll}
 a) \int \ln x dx & b) \int (3x+5) e^{2x} dx & c) \int \sin(x) e^{-x} dx \\
 d) \int (x^2-1) \ln(2x) dx & e) \int \arctan x dx & f) \int 3x^2 \ln(x^2+1) dx \\
 g) \int (x^2+1) \arctan x dx & h) \int \arcsin x dx & i) \int x \arctan x dx
 \end{array}$$

Exercice 6. Changement de variables

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} & b) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} & c) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \\ d) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} & e) \int \frac{dx}{2+\sin x} & f) \int (2x+1)\sqrt{x+2} dx \end{array}$$

Exercice 7. Calculez $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$.

A l'aide du changement de variable $x = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$, déterminez les primitives de

$$\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(t+1)(\sqrt{\frac{t}{t+1}} - \frac{t}{t+1})}$$

Exercice 8. Pour tout entier n , on définit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.

1. Calculez I_0 et I_1 .
2. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$
3. Montrez que pour $n = 2k$, on a : $I_{2k} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} \cdot \frac{\pi}{2}$
4. Montrez que pour $n = 2k+1$, on a : $I_{2k+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)}$
5. Montrez que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
6. Montrez que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}$ (Formule de Wallis).