Feuille 8 : Calcul de primitives

Exercice 1. Primitives usuelles à connaître

$$a)\ \int (2x^3-3x^2+4)\,\mathrm{d}x \qquad b)\ \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int \frac{3}{2x+4}\,\mathrm{d}x$$
$$d)\ \int \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \qquad e)\ \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad f)\ \int \sin x\,\mathrm{d}x$$
$$g)\ \int e^{3x+1}\,\mathrm{d}x \qquad h)\ \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \qquad i)\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Correction. Pour chaque constant réel C,

$$a)\ \int (2x^3-3x^2+4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 4x + C \qquad b)\ \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$
$$c)\ \int \frac{3}{2x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln|x+2| + C \qquad d)\ \int \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\arctan x + C$$
$$e)\ \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C \qquad f)\ \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$
$$g)\ \int e^{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C \qquad h)\ \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x+1} + C$$

$$i)\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[\arcsin x\Big]_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2. Primitives "décalées", à reconnaître

$$a)\ \int (x^2-3x+4)^5(4x-6)\,\mathrm{d}x \qquad b)\ \int \sin^7 x\cos x\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$d)\ \int \frac{9x^2-6}{x^3-2x+5}\,\mathrm{d}x \qquad e)\ \int \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}}\,\mathrm{d}x \qquad f)\ \int e^{2x^2-4x}(x-1)\,\mathrm{d}x$$
$$g)\ \int \frac{3}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad h)\ \int \frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad i)\ \int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2-4)^4}\,\mathrm{d}x$$

Indication. *Ce sont des primitives facile à trouver à l'aide de changement de variable facile, voir évident.*

Correction. Pour chaque constant réel C,

$$a)\ \int (x^2-3x+4)^5(4x-6)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{6}(x^2-3x+4)^6 + C \qquad b)\ \int \sin^7 x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\sin^8 x + C$$
$$c)\ \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C = \ln|\frac{1}{\cos x}| + C \qquad d)\ \int \frac{9x^2-6}{x^3-2x+5}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x^3-2x+5| + C$$
$$e)\ \int \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}}\,\mathrm{d}x = 3\sqrt{x^2-2} + C \qquad f)\ \int e^{2x^2-4x}(x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{2x^2-4x} + C$$
$$g)\ \int \frac{3}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 3\tan x + C \qquad h)\ \int \frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{2-x^2} + C$$

$$i)\ \int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2-4)^4}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{6}(x^2-4)^{-3}\Big]_{x=-1}^{x=1} = 0.$$

Exercice 3. Fractions rationnelles

$$a)\ \int \frac{-2}{2x-5}\,\mathrm{d}x \qquad b)\ \int \frac{3}{x^2+4}\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int \frac{2x-5}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x$$
$$d)\ \int \frac{4}{(x-1)^5}\,\mathrm{d}x \qquad e)\ \int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x \qquad f)\ \int \frac{2}{x(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$$
$$g)\ \int \frac{x^4}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x \qquad h)\ \int \frac{x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x \qquad i)\ \int_{\frac14}^{\frac12} \frac{3x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Indication. *Se souvenir que* $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. *Pour quelques cas ci-dessous, il faut appliquer la technique de décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.*

Correction.

a) $\displaystyle\int \frac{-2}{2x-5}\,\mathrm{d}x = -\ln|2x-5| + C = \ln|\frac{1}{2x-5}| + C.$

b) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac34\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x \overset{u=x/2}{=} \frac34\int \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac32\arctan(u) + C = \frac32\arctan(\frac{x}{2}) + C.$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x}{2x^2+3} + \frac{-5}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x$ avec $\displaystyle\int \frac{2x}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac12\int\frac{4x}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac12\ln|2x^2+3| + C'$

et $\displaystyle\int \frac{-5}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x = -\frac53\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt3}x\right)^2+1}\,\mathrm{d}x \overset{u=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}x}{=} -\frac53\int\frac{\frac{\sqrt3}{\sqrt2}}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = -\frac{5}{\sqrt6}\arctan(u) + C''$
$\displaystyle= -\frac{5}{\sqrt6}\arctan(\frac{\sqrt2}{\sqrt3}x) + C''.$

donc $\displaystyle\int \frac{2x-5}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac12\ln|2x^2+3| - \frac{5}{\sqrt6}\arctan(\frac{\sqrt2}{\sqrt3}x) + C.$

d) $\displaystyle\int \frac{4}{(x-1)^5}\,\mathrm{d}x = -(x-1)^{-4} + C.$

e) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac12\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

avec $\displaystyle\frac12\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac12\ln|x^2+2x+5| + C'$ et

$\displaystyle\int\frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac14\int\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x \overset{u=(x+1)/2}{=} \frac14\int\frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac12\arctan(u) + C'' = \frac12\arctan(\frac{x+1}{2}) + C''$

donc $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac12\ln|x^2+2x+5| + \frac12\arctan(\frac{x+1}{2}) + C.$

f) $\displaystyle\int \frac{2}{x(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac1x + \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - 2\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \ln|\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}| + C.$

g) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int x^2+3x+7 - \frac{1}{x-1} + \frac{16}{x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 7x + \ln\left|\frac{(x-2)^{16}}{x-1}\right| + C.$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac13}{x-1} + \frac{\frac23x+\frac13}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ avec $\displaystyle\int\frac{\frac13}{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac13\ln|x-1| + C'$

et $\displaystyle\int\frac{\frac23x+\frac13}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac13\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac13\ln|x^2+x+1| + C''$

donc $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x^2+x+1| + C = \ln|(x^3-1)^{\frac{1}{3}}| + C.$

i) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad = \int -3 + \frac{3}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int -3 + \frac{\frac{3}{2}}{1-x} + \frac{\frac{3}{2}}{1+x}\,\mathrm{d}x = -3x + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

Ainsi $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{3x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[-3x + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big]_{x=\frac{1}{4}}^{x=\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\ln(3) + \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\ln(\frac{5}{3}) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\ln(\frac{9}{5}).$

Exercice 4. Fonctions circulaires

$$
\begin{array}{lll}
a)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x & b)\ \displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x & c)\ \displaystyle\int \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x \\
d)\ \displaystyle\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x & e)\ \displaystyle\int \cos(2x)\sin x\,\mathrm{d}x & f)\ \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \\
g)\ \displaystyle\int \frac{2}{\sin x}\,\mathrm{d}x & h)\ \displaystyle\int \frac{3\sin x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x & i)\ \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x
\end{array}
$$

Indication. *Une technique systématique est l'application des* règles de Bioches *pour trouver le changement de variable qui permet de ramener la primitive d'une fraction rationnelle en* $(\sin x, \cos x)$ *à une primitive de fraction rationnelle. Si* $\displaystyle\int F(x)\,\mathrm{d}x$ *est la primitive à calculer, alors*

- *si* $F(x)\,\mathrm{d}x$ *est invariant par la transformation* $x \mapsto -x$*, on fait le changement de variable* $u = \cos x$*,*
- *si* $F(x)\,\mathrm{d}x$ *est invariant par la transformation* $x \mapsto \pi - x$*, on fait le changement de variable* $u = \sin x$*,*
- *si* $F(x)\,\mathrm{d}x$ *est invariant par la transformation* $x \mapsto \pi + x$*, on fait le changement de variable* $u = \tan x$*,*
- *si aucun des changements de variable ci-dessus ne fonctionne, on fait le changement de variable* $u = \tan(x/2)$.

Les primitives des puissances paires *de* sin *et* cos *peuvent être trouvées par linéarisation, par exemple en utilisant les formules d'Euler. Il faut se souvenir aussi de propriétés comme* $\cos^2 + \sin^2 x = 1$, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$. *Et donc,* $\cos^2 x = (\cos(2x)+1)/2$, $\sin^2 x = (1-\cos(2x))/2$, *ces deux dernières égalités peuvent être vues comme la linéarisation de* $\cos^2$ *et* $\sin^2$ *respectivement. À savoir aussi :* $(\cos x)' = -\sin x$ *et* $(\sin x)' = \cos x$, $(\tan x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ *et* $(\dfrac{1}{\tan x})' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

Exercice 5. Intégration par parties

$$
\begin{array}{lll}
a)\ \displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x & b)\ \displaystyle\int (3x+5)\,e^{2x}\,\mathrm{d}x & c)\ \displaystyle\int \sin(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
d)\ \displaystyle\int (x^2-1)\ln(2x)\,\mathrm{d}x & e)\ \displaystyle\int \arctan x\,\mathrm{d}x & f)\ \displaystyle\int 3x^2\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x \\
g)\ \displaystyle\int (x^2+1)\arctan x\,\mathrm{d}x & h)\ \displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x & i)\ \displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,\mathrm{d}x
\end{array}
$$

Indication. *Appliquer la formule d'intégration par parties* $\displaystyle\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$. *Il faut trouver les bonnes fonctions* u *et* v' *telles que la primitive de* $\displaystyle\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ *soit facile à calculer.*

Exercice 6. Changement de variables

$$
\begin{array}{lll}
a)\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}} & b)\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} & c)\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} \\
d)\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} & e)\ \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} & f)\ \displaystyle\int (2x+1)\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x
\end{array}
$$

Indication. *Le changement de variable sert à transformer une primitive en une autre primitive que l'on sait calculer. Il est parfois nécessaire de faire plusieurs changements de variable à la suite. Pour trouver le bon changement de variable, il faut avoir un peu d'intuition. Pour cela, il faut de l'expérience bien sûr et aussi un mental calme. Citons Bruce Lee, acteur et maître de Kung Fu, qui a dit "sois comme l'eau"*[1]*, pour décrire sa philosophie du Kung Fu. Voilà, faites comme Bruce Lee ! Essayez d'avoir les pensées lègères et fluides pour trouver un bon chemin ! Vous n'avez pas besoin d'enlever les "pierres" sur votre chemin. Au lieu de cela, trouver une bonne astuce pour contourner les obstacles. Bon courage !*

Exercice 7. Calculez $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x-1)}$.

A l'aide du changement de variable $x = \sqrt{\dfrac{t}{t+1}}$, déterminez les primitives

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)(\sqrt{\frac{t}{t+1}} - \frac{t}{t+1})}.$$

Indication. *Il faut d'abord trouver la décomposition en éléments simples de* $\dfrac{1}{X^2(X-1)}$.

Exercice 8. Pour tout entier n, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculez I_0 et I_1.
2. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
3. Montrez que pour $n = 2k$, on a : $\quad I_{2k} = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k} \cdot \dfrac{\pi}{2}$.
4. Montrez que pour $n = 2k+1$, on a : $\quad I_{2k+1} = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2k}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}$.
5. Montrez que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
6. Montrez que $\quad \displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}$ (Formule de Wallis).

Indication. *Pour la question 2, utiliser la formule d'intégration par parties. Question 3, 4, à démontrer par récurrence. Rappelons aussi qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante si* $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Bruce Lee : "Empty your mind. Be formless, shapeless, like water."