Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020
Fondamentaux des Mathématiques 2

Feuille 5 : Applications linéaires

Exercice 1. Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont des applications linéaires :

1. La fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f_1(x, y) = (0, 2y)$.
2. La fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f_2(x, y) = (x + 3, y)$.
3. La fonction $f_3 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ donnée par $f_3(x) = 1/x$.
4. La fonction $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f_4(x, y) = (y^2, x - y)$.
5. La fonction $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f_5(x, y, z) = (x + z, y + z)$.

Indication 1. *Une application $f : E \to F$ entre deux $\mathbb{K}$-espaces véctoriels E et F est linéaire si elle est "compatible" avec les lois de E et F, c'est-à-dire si :*
a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in E$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$
b) et $\forall u, v \in E$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$,
ou, plus synthétiquement,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$$

Notons que si f est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$; cette remarque peut être utile pour montrer qu'une application n'est pas linéaire (mais attention, l'égalité $f(0_E) = 0_F$ ne suffit pas à garantir la linéarité de f, loin de là !).

Exercice 2.

1. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application linéaire, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications linéaires non nulles. Montrer que l'application $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x)$ est linéaire mais que l'application $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$ ne l'est pas.

Indication 2. *Pour la première question, rappeler qu'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension fini dans un espace vectoriel quelconque est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ. Voir indication 1 pour la deuxième.*

Exercice 3. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$. En déduire le rang de f.
3. Donner une base de $\mathrm{im}(f)$.

Indication 3. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Le noyau de f, noté* $\ker(f)$, *est défini par* $\ker f = \{u \in E : f(u) = 0_F\}$. *C'est un sous-espace vectoriel de E. L'image de f, notée* $\mathrm{im}(f)$, *est définie par* $\mathrm{im}(f) = \{v \in F : \exists u \in E$ *tel que* $f(u) = v\}$. *C'est un sous-espace vectoriel de F. Le rang de f, noté* $\mathrm{rang}(f)$, *est défini par* $\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{im}(f))$ *: il s'agit de la dimension de l'espace vectoriel* $\mathrm{im}(f)$.
Pour une application linéaire $f : E \to F$, le théorème du rang affirme que $\dim E = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rang}(f)$.

Exercice 4. Soit f l'homothétie de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = \alpha(x, y)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(f)$.
3. Déterminer le rang de f. En déduire $\mathrm{im}(f)$.

Indication 4. *Voir indication 3.*

Exercice 5. Soit $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$R_\theta(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

1. Montrer que R_θ est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(R_\theta)$ et le rang de R_θ.
3. Déterminer le rang $\mathrm{rang}(R_\theta)$ de R_θ. En déduire $\mathrm{im}(R_\theta)$.

Indication 5. *Voir indication 3 pour les notions de noyau, image et rang.*

Exercice 6. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application trace par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

1. Montrer que l'application trace est linéaire.
2. Déterminer l'image et le rang de Tr.
3. A l'aide du théorème du rang, déterminer la dimension de $\ker(\mathrm{Tr})$.
4. Retrouver le résultat de la question précédente en revenant à la définition de $\ker(\mathrm{Tr})$.

Indication 6. *Voir indication 3 pour les notions de noyau, image et rang.*

Exercice 7. Soit Φ la fonction définie sur l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$\Phi : f \longmapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right).$$

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Déterminer son noyau.
3. Déterminer son image.

Indication 7. *Voir indication 3 pour les notions de noyau et image. Il sera utile de se souvenir que* $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ *est une primitive de* f *; c'est l'unique primitive de* f *s'annulant en* 0.

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur l'espace des suites à valeurs réelles par

$$f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Quelle relation doivent vérifier les termes u_{n+2}, u_{n+1} et u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que cette dernière soit dans le noyau de f ?

Indication 8. *Voir indication 3 pour les notions de noyau et image.*

Exercice 9. On considère l'application f définie sur l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et à valeurs dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(y) = y' + y.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $y' + y = 0$.
3. En déduire une base du noyau de f.

Indication 9. *Revoir les techniques utilisées dans la feuille 2.*

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4)$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer l'image des vecteurs de la base canonique par f. En déduire le rang de f.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Indication 10. *On pourra utiliser le fait que* $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$. *Voir indication 3 pour les notions de noyau et image.*

Exercice 11. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie, pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par $f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$.

1. Déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(a)$.
2. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.
   a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$.
   b. En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $\mathrm{im}(f)$.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\mathrm{im}(f)$.
4. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Indication 11. *Voir indication 3 pour les notions de noyau et image. Pour la question 2(b), les calculs faits pour 2(a) devraient vous guider. Des problèmes similaires à 3 et 4 ont été traités dans la feuille 3.*

Exercice 12. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} u(e_1) &= e'_1 - e'_2 + 2e'_3 \\ u(e_2) &= 2e'_1 + e'_2 - 3e'_3 \\ u(e_3) &= 3e'_1 - e'_3 \\ u(e_4) &= -e'_1 - 2e'_2 + 5e'_3. \end{aligned}$$

1. Déterminer l'image par u du vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
3. En déduire le rang de u et déterminer une base de $\mathrm{im}(u)$.

Indication 12. *Rappelons que l'on peut écrire (x_1, x_2, x_3, x_4) comme $\sum_{i=1}^{4} x_i e_i$. Combiner cela avec le fait que u est une application linéaire.*

Exercice 13. Soient $\mathcal{B} = (X^2, X, 1)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Montrer que u est une application linéaire et que $\mathrm{im}(u) \subseteq \mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $\ker(u)$.
3. Déterminer $\dim(\ker(u))$ et le rang de u.
4. Calculer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par u. En déduire une base de $\mathrm{im}(u)$.

Indication 13. *Voir indication 3 pour les notions de noyau et image.*

Exercice 14. Soit $u : E \to E$ une application linéaire. Montrer que [u est injective] $\Leftrightarrow$ [$\ker u = \{0_E\}$].

Indication 14. *Rappelons que u est injective si $\forall x, y \in E$, $[u(x) = u(y) \Rightarrow x = y]$. On doit montrer $P \Leftrightarrow Q$. Au lieu de montrer directement que $P \Rightarrow Q$, il plus simple de montrer la contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$.*

Exercice 15. Soit $u : E \to E$ une application linéaire, E étant un espace vectoriel de dimension n. Montrer que les propositions suivants sont équivalents
(i) $\mathrm{im}(u) = \ker(u)$
(ii) $\forall x \in E, u^2(x) = 0$ et $n = 2\mathrm{rang}(u)$.

Indication 15. *Rappelons que $u^2(x) = u(u(x))$. Rappelons également que, pour tout sous-espace vectoriel A d'un espace vectoriel B de dimension finie, on a*

$$[A = B] \Leftrightarrow [A \subseteq B \text{ et } \dim(A) = \dim(B)].$$

Exercice 16. Soient E, F, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, avec f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Montrer que $[\mathrm{Im} f \subseteq \ker g] \Leftrightarrow [g \circ f(x) = 0 \ \forall x \in E]$.

Indication 16. *Ceci n'est pas difficile.*

Exercice 17. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

1. Montrer que si la famille $(v_1, v_2, ..., v_p)$ engendre $\mathbb{R}^n$ alors $(f(v_1), f(v_2), ...f(v_p))$ engendre $\mathrm{im}(f)$.
2. Montrer que si la famille $(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_p))$ est libre alors $(v_1, v_2, ..., v_p)$ est également libre.
3. Montrer que si f est injective et si $(v_1, ..., v_p)$ est une famille libre alors $(f(v_1), ..., f(v_p))$ est également libre.

Indication 17. *Pour la question 3, utiliser l'exercice 14.*

Exercice 18. Soient est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, $u : E \to E$ une application linéaire et λ un réel. On note $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

1. Pourquoi E_λ est-il un sous-espace vectoriel de E ? Pour $x \in E_\lambda$, calculer $u(x)$ en fonction de λ et x.
2. Soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$.

Indication 18. *Pour 3., on pourra procéder par inclusions réciproques, c'est-à-dire utiliser :* $[A = B] \Leftrightarrow [A \subseteq B$ *et* $B \subseteq A]$.

Exercice 19. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f^2 (= f \circ f) = f$ (on dit que f est un projecteur).

1. Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f) = \mathrm{im}(f)$.
3. En déduire que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont supplémentaires.
4. Soit p définie sur $\mathbb{R}^2$ par $p(x, y) = (\frac{y}{2}, y)$.
   (i) Montrer que c'est une projection.
   (ii) Déterminer sur quelle droite projette p.
   (iii) Déterminer sur quelle droite projette $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - p$.

Indication 19. *L'exercice n'est pas difficile. Appliquez les définitions. Pour la question 2, utilisez* $[A = B] \Leftrightarrow [A \subseteq B$ *et* $B \subseteq A]$. *Rappelez aussi que si p est un projecteur, p projette sur* $\mathrm{im}(p)$ *parallèlement à* $\ker(p)$.

Exercice 20. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie p. Soient $f : E \to E$ une application linéaire et $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\ker(f^k) \subseteq \ker(f^{k+1})$.
2. Comparer $\dim(\ker(f^k))$ et $\dim(\ker(f^{k+1}))$.
3. Montrer que $\mathrm{im}(f^{k+1}) \subseteq \mathrm{im}(f^k)$.
4. Comparer $\dim(\mathrm{im}(f^k))$ et $\dim(\mathrm{im}(f^{k+1}))$.

Indication 20. *Ceci n'est pas difficile.*

Amusez vous bien !


JE NE FERAI PAS MON DEVOIR DE MATHS.
REGARDE CES PROBLÈMES IRRÉSOLUS. LES NOMBRES S'AFFRONTENT EN UN COMBAT À MORT, L'UN D'EUX VA ÊTRE SOUSTRAIT, MAIS POURQUOI? COMMENT? QUE RESTE-T-IL DE LUI?
SI JE RÉPONDAIS, JE TUERAIS TOUT SUSPENSE, CELA RÉSOUDRAIT LE CONFLIT ET CHANGERAIT DE PASSIONNANTES VIRTUALITÉS EN UNE TRISTE RÉALITÉ.
JE N'AVAIS JAMAIS PENSÉ AUX QUALITÉS LITTÉRAIRES DES MATHS.
JE PRÉFÈRE SAVOURER LE MYSTÈRE.