Feuille 5 : Applications linéaires

Exercice 1. Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont des applications linéaires :

1. La fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f_1(x,y) = (0, 2y)$.
2. La fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f_2(x,y) = (x+3, y)$.
3. La fonction $f_3 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ donnée par $f_3(x) = 1/x$.
4. La fonction $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f_4(x,y) = (y^2, x-y)$.
5. La fonction $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f_5(x,y,z) = (x+z, y+z)$.

Exercice 2.

1. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application linéaire, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications linéaires non nulles. Montrer que l'application $f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)+g(x)$ est linéaire mais que l'application $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$ ne l'est pas.

Exercice 3. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-2y+z)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$. En déduire le rang de f.
3. Donner une base de $\mathrm{im}(f)$.

Exercice 4. Soit f l'homothétie de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = \alpha(x,y)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(f)$.
3. Déterminer le rang de f. En déduire $\mathrm{im}(f)$.

Exercice 5. Soit $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$R_\theta(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

1. Montrer que R_θ est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(R_\theta)$ et le rang de R_θ.
3. Déterminer le rang $\mathrm{rang}(R_\theta)$ de R_θ. En déduire $\mathrm{im}(R_\theta)$.

Exercice 6. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application trace par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

1. Montrer que l'application trace est linéaire.
2. Déterminer l'image et le rang de Tr.
3. A l'aide du théorème du rang, déterminer la dimension de $\ker(\mathrm{Tr})$.
4. Retrouver le résultat de la question précédente en revenant à la définition de $\ker(\mathrm{Tr})$.

Exercice 7. Soit Φ la fonction définie sur l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$\Phi : f \longmapsto \Big(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\Big).$$

1. Montrer que Φ est linéaire.

2. Déterminer son noyau.
3. Déterminer son image.

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur l'espace des suites à valeurs réelles par

$$f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Quelle relation doivent vérifier les termes u_{n+2}, u_{n+1} et u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que cette dernière soit dans le noyau de f ?

Exercice 9. On considère l'application f définie sur l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et à valeurs dans l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(y) = y' + y.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $y' + y = 0$.
3. En déduire une base du noyau de f.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4)$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer l'image des vecteurs de la base canonique par f. En déduire le rang de f.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Exercice 11. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie, pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par $f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$.

1. Déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(a)$.
2. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.
   a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$.
   b. En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $\mathrm{im}(f)$.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\mathrm{im}(f)$.
4. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 12. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} u(e_1) &= e'_1 - e'_2 + 2e'_3 \\ u(e_2) &= 2e'_1 + e'_2 - 3e'_3 \\ u(e_3) &= 3e'_1 - e'_3 \\ u(e_4) &= -e'_1 - 2e'_2 + 5e'_3. \end{aligned}$$

1. Déterminer l'image par u du vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
3. En déduire le rang de u et déterminer une base de $\mathrm{im}(u)$.

Exercice 13. Soient $\mathcal{B} = (X^2, X, 1)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = P + (1 - X)P'$.

1. Montrer que u est une application linéaire et que $\mathrm{im}(u) \subseteq \mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $\ker(u)$.
3. Déterminer $\dim(\ker(u))$ et le rang de u.

4. Calculer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par u. En déduire une base de $\mathrm{im}(u)$.

Exercice 14. Soit $u : E \to E$ une application linéaire. Montrer que [u est injective] $\Leftrightarrow$ [$\ker u = \{0_E\}$].

Exercice 15. Soit $u : E \to E$ une application linéaire, E étant un espace vectoriel de dimension n. Montrer que les propositions suivants sont équivalents
(i) $\mathrm{im}(u) = \ker(u)$
(ii) $\forall x \in E, u^2(x) = 0$ et $n = 2\mathrm{rang}(u)$.

Exercice 16. Soient E, F, G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, avec f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Montrer que $[\mathrm{Im} f \subseteq \ker g] \Leftrightarrow [g \circ f(x) = 0 \ \forall x \in E]$.

Exercice 17. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

1. Montrer que si la famille $(v_1, v_2, ..., v_p)$ engendre $\mathbb{R}^n$ alors $(f(v_1), f(v_2), ...f(v_p))$ engendre $\mathrm{im}(f)$.
2. Montrer que si la famille $(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_p))$ est libre alors $(v_1, v_2, ..., v_p)$ est également libre.
3. Montrer que si f est injective et si $(v_1, ..., v_p)$ est une famille libre alors $(f(v_1), ..., f(v_p))$ est également libre.

Exercice 18. Soient est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, $u : E \to E$ une application linéaire et λ un réel. On note $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

1. Pourquoi E_λ est-il un sous-espace vectoriel de E ? Pour $x \in E_\lambda$, calculer $u(x)$ en fonction de λ et x.
2. Soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Si $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$.

Exercice 19. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f^2(= f \circ f) = f$ (on dit que f est un projecteur).

1. Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f) = \mathrm{im}(f)$.
3. En déduire que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont supplémentaires.
4. Soit p définie sur $\mathbb{R}^2$ par $p(x, y) = (\frac{y}{2}, y)$.
   (i) Montrer que c'est une projection.
   (ii) Déterminer sur quelle droite projette p.
   (iii) Déterminer sur quelle droite projette $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - p$.

Exercice 20. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie p. Soient $f : E \to E$ une application linéaire et $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\ker(f^k) \subseteq \ker(f^{k+1})$.
2. Comparer $\dim(\ker(f^k))$ et $\dim(\ker(f^{k+1}))$.
3. Montrer que $\mathrm{im}(f^{k+1}) \subseteq \mathrm{im}(f^k)$.
4. Comparer $\dim(\mathrm{im}(f^k))$ et $\dim(\mathrm{im}(f^{k+1}))$.

Amusez vous bien !


JE NE FERAI PAS MON DEVOIR DE MATHS.
REGARDE CES PROBLÈMES IRRÉSOLUS. LES NOMBRES S'AFFRONTENT EN UN COMBAT À MORT. L'UN D'EUX VA ÊTRE SOUSTRAIT, MAIS POURQUOI? COMMENT? QUE RESTE-T-IL DE LUI?
SI JE RÉPONDAIS, JE TUERAIS TOUT SUSPENSE. CELA RÉSOUDRAIT LE CONFLIT ET CHANGERAIT DE PASSIONNANTES VIRTUALITÉS EN UNE TRISTE RÉALITÉ.
JE N'AVAIS JAMAIS PENSÉ AUX QUALITÉS LITTÉRAIRES DES MATHS.
JE PRÉFÈRE SAVOURER LE MYSTÈRE.