Feuille 10 : Comparaisons de fonctions, développements limités et asymptotiques

Exercice 1. Les affirmations suivantes concernent des comparaisons de fonctions en 0. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. $x^3 = O(x^2)$
2. $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = O(x^2)$
3. $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = o(\sqrt{|x|})$
4. $\dfrac{1}{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}} = o(1/\sqrt{|x|})$
5. $\ln(|x|) = o(1/|x|)$
6. Si $f(x) = o(x)$ et $g(x) = o(x)$ alors $f(x) = g(x)$.

Indication 1. *Considérons deux fonction f, g à valeurs réelles définies sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$.*
Pour décider si $f = o(g)$ en 0 lorsque g est une fonction ne s'annulant pas sur un voisinage épointé de 0, il est souvent commode de considérer le quotient f/g : dans ce cas, on a $f = o(g)$ si et seulement si (f/g tend vers 0 en 0 et $f(0) = 0$ si $g(0) = 0$).
Pour déterminer si on a $f = O(g)$ en 0 lorsque g est une fonction ne s'annulant pas sur un voisinage épointé de 0, il est souvent commode de considérer le quotient f/g : dans ce cas, on a $f = O(g)$ si et seulement si ($|f/g|$ est majorée sur un voisinage épointé de 0 et $f(0) = 0$ si $g(0) = 0$).
Si f ou g n'est pas définie en 0, mais seulement sur un voisinage épointé de 0, ce qui précède vaut encore en supprimant la condition "$f(0) = 0$ si $g(0) = 0$" qui n'a pas de sens dans ce cas.

Correction. Dans ce qui suit, nous utiliserons à maintes reprises la méthode rappelée dans l'Indication. Elle nécessite que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de 0. Cette propriété sera systématiquement vérifiée dans cet exercice ; nous ne le répéterons pas.

1. Vrai. En effet, notons $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2$. On a $f(0) = 0$ et la fonction $f(x)/g(x) = x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et est donc bornée sur un voisinage épointé de 0.
2. Faux. En effet, si on note $f(x) = 2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}$ et $g(x) = x^2$, la fonction
$$|f(x)/g(x)| = \left|\frac{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}}{x^2}\right| = \left|2x + \frac{1}{|x|}\sqrt{x^2 + 1}\right|$$
tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 (car $2x$ tend vers 0 et $\frac{1}{|x|}\sqrt{x^2 + 1}$ tend vers $\frac{1}{0^+} = +\infty$ lorsque x tend vers 0) et n'est donc majorée sur aucun voisinage épointé de 0.
3. Vrai. En effet, si on note $f(x) = 2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}$ et $g(x) = \sqrt{|x|}$, on a $f(0) = 0$ et la fonction
$$|f(x)/g(x)| = \left|\frac{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}}{\sqrt{|x|}}\right| \leq 2|x|^{2+1/2} + \sqrt{|x|}\sqrt{x^2 + 1}$$
tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
4. Faux. On peut le démontrer directement, sur le modèle de ce qui a été fait précédemment. On peut aussi s'y prendre la façon suivante. On a vu que si $f(x) = 2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}$ et $g(x) = \sqrt{|x|}$, on a $f = o(g)$, ce qui implique que $1/g = o(1/f)$ (réfléchissez un peu pour voir pourquoi ?) et donc $1/f$ ne peut être un $o(1/g)$ (sinon, $1/g = o(1/f)$ serait aussi un $o(1/g)$, ce qui n'est pas vrai (réfléchissez un peu pour voir pourquoi ?)).
5. Vrai. En effet, si $f(x) = \ln(|x|)$ et $g(x) = 1/|x|$ alors $f(x)/g(x) = |x|\ln(|x|)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

6. Faux. Par exemple, $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ sont des fonctions distinctes vérifient $f(x) = o(x)$ et $g(x) = o(x)$.

Exercice 2. Reprendre l'exercice précédent en considérant que les comparaisons ont lieu en $+\infty$ (plutôt qu'en 0).

Indication 2. *Pour déterminer si on a $f = o(g)$ en $+\infty$ lorsque g est une fonction ne s'annulant pas sur un voisinage de $+\infty$, il est souvent commode de considérer le quotient f/g : dans ce cas, on a $f = o(g)$ si et seulement si f/g tend vers 0 en $+\infty$.*
Pour déterminer si on a $f = O(g)$ en $+\infty$ lorsque g est une fonction ne s'annulant pas sur un voisinage de $+\infty$, il est souvent commode de considérer le quotient f/g : dans ce cas, on a $f = O(g)$ si et seulement si $|f/g|$ est majorée sur un voisinage de $+\infty$.

Correction. Dans ce qui suit, nous utiliserons à maintes reprises la méthode rappelée dans l'Indication. Elle nécessite que g ne s'annule pas sur un voisinage de $+\infty$. Cette propriété sera systématiquement vérifiée dans cet exercice ; nous ne le répéterons pas.
De plus, puisque nous nous intéressons dans cet exercice à des propriétés au voisinage de $+\infty$, on peut supposer que la variable x appartient à $\mathbb{R}_{>0}$, ce que nous supposerons systématiquement sans le préciser à chaque fois (cela permet de simplifier un peu les formules : certaines valeurs absolues disparaissent).

1. Faux. En effet, si on note $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2$, la fonction $|f(x)/g(x)| = x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et n'est donc majorée sur aucun voisinage de $+\infty$.
2. Faux. En effet, si on note $f(x) = 2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}$ et $g(x) = x^2$, la fonction
$$|f(x)/g(x)| = \left|\frac{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}}{x^2}\right| = 2x + \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + 1}$$
tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (car $2x$ tend vers $+\infty$ et $\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$) et n'est donc majorée sur aucun voisinage de $+\infty$.
3. Faux. En effet, si on note $f(x) = 2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}$ et $g(x) = \sqrt{|x|}$, la fonction
$$|f(x)/g(x)| = \left|\frac{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}}{\sqrt{|x|}}\right| = 2x^{2+1/2} + \sqrt{x}\sqrt{x^2 + 1}$$
tend vers $+\infty$, et donc pas vers 0, lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Vrai. Cela résulte du calcul fait dans la correction de 3.
5. Faux. En effet, si $f(x) = \ln(|x|)$ et $g(x) = 1/|x|$ alors $f(x)/g(x) = x\ln(x)$ qui tend vers $+\infty$, et donc pas vers 0, lorsque x tend vers $+\infty$.
6. Faux. Par exemple, les fonctions $f(x) = 1$ et $g(x) = x^{1/2}$ sont distinctes et vérifient $f(x) = o(x)$ et $g(x) = o(x)$.

Exercice 3. Soit f une application à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. Les affirmations suivantes concernent les propriétés de f au voisinage de 0. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si $f(x) = x^3 + o(x^3)$ alors $f(x) = o(x^3)$.
2. Si $f(x) = x^2 + o(x^3)$ alors $f(1 + x) = (1 + x)^2 + o(x^3)$.
3. Si $f(x) = x^2 + o(x^3)$ alors $f(x(1 + x)) = (x(1 + x))^2 + o(x^3)$.

Correction.

1. Faux. Par exemple, $f(x) = x^3$ vérifie $f(x) = x^3 = x^3 + 0 = x^3 + o(x^3)$ mais $f(x)$ n'est pas un $o(x^3)$ car $f(x)/x^3 = 1$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0.
2. Faux. Prenons $f(x) = x^2+x^4$. On a bien $f(x) = x^2+o(x^3)$ puisque $x^4 = o(x^3)$. Mais $f(1+x)-(1+x)^2 = (1 + x)^4$ n'est pas un $o(x^3)$ puisque $(1 + x)^4/x^3$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0.
3. Vrai. En effet, $f(x(1 + x)) = (x(1 + x))^2 + o((x(1 + x))^3)$ et $o((x(1 + x))^3)$ est aussi un $o(x^3)$ (puisque $o((x(1 + x))^3)/x^3 = o((1 + x)^3)$ qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0).

Exercice 4. Démontrer les développements limités en 0 suivants :

1. $\cos(x)\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
2. $\frac{1}{1-\sin(x)} = 1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$.
3. $\frac{1}{1-\arctan(x)} = 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$.
4. $\frac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3} + \frac{x^2}{36} + o(x^2)$.
5. $\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2x^3}{3} + o(x^4)$.
6. $\arcsin(\ln(1+x^2)) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$.
7. $\frac{\arcsin(x)-x}{\sin(x)-x} = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{7x^4}{24} + o(x^4)$.
8. $\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = -\frac{x}{2} + \frac{5x^2}{24} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$.
9. $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}} = \mathrm{e} + \frac{\mathrm{e}x}{2} + \frac{\mathrm{e}x^3}{48} + o(x^3)$.
10. $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} - \frac{x^2}{60\sqrt{\mathrm{e}}} + o(x^3)$.

Indication 3. *Afin de déterminer explicitement le DL en 0 à l'ordre n d'une fonction f, il est tentant de calculer directement le polynôme de Taylor de f en 0 à l'ordre n (en calculant donc au préalable $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$). Cette méthode, bien que tout à fait valable, est rarement utilisée car elle conduit souvent à des calculs énormes. Dans la pratique, on utilise plutôt les théorèmes du cours concernant les opérations sur les DL (somme, produit, composition, etc) combinés aux DL classiques (ceux des fonctions sinus, cosinus, exponentielles, etc ; voir le cours). C'est ce qu'il faut faire dans cet exercice.*

Correction.

1. On a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \text{ et } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

D'où, par multiplication des DL,

$$\cos(x)\ln(1+x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + o(x^4).$$

Un calcul direct montre que

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \text{termes de deg.} > 4$$

donc

$$\cos(x)\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

2. On a

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$

donc

$$\frac{1}{1-\sin(x)} = \frac{1}{1 - (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4))}$$

De plus, on a le DL en $u = 0$ suivant :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o(u^4).$$

Par composition des DL, on en déduit :

$$\frac{1}{1-\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4 + o(x^4).$$

Le résultat découle alors d'un calcul direct montrant que

$$1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4 = 1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + \text{ termes de deg.} > 4.$$

3. La méthode est la même que dans l'exercice précédent, en utilisant le DL en 0 suivant :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Le résultat découle de

$$1+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^2+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^3+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)^4 = 1+x+x^2+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{3}+\text{ termes de deg. } > 4.$$

4. On a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

et

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

donc

$$1 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 3 - \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2)}.$$

Par ailleurs, on a le DL en 0 suivant :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2).$$

Par composition des DL, on en déduit :

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x^2}{12} + \left(\frac{x^2}{12}\right)^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{3} + \frac{x^2}{36} + o(x^2).$$

5. On a sait que

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

On sait aussi que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

et donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

Par multiplication des DL, on en déduit :

$$\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \left(x + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4\right) + o(x^4).$$

Le résultat suit par un calcul direct montrant que

$$\left(x + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4\right) = x + \frac{2x^3}{3} + \text{ termes de deg. } > 4.$$

Alternativement, on aurait pu remarquer que

$$\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}(\arcsin^2(x))',$$

calculer le DL en 0 de $\arcsin^2(x)$ à l'ordre 5 (pourquoi l'ordre 5 ?) et appliquer le résultat du cours sur la dérivée des DL.

6. Il s'agit à nouveau de composer des DL.

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \text{ et } \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

$$\arcsin(\ln(1+x^2)) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \text{ termes de deg. } > 4,$$

d'où le résultat.

7. Cet exemple est plus subtil que les précédents. En effet, si on se base sur ce qui a été fait précédemment on est tenté de calculer d'abord les DL à l'ordre 4 de $\arcsin(x) - x$ et de $\sin(x) - x$, ce qui est facile :

$$\arcsin(x) - x = \frac{x^3}{6} + o(x^4) \text{ et } \sin(x) - x = -\frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

D'où

$$\frac{\arcsin(x) - x}{\sin(x) - x} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{-\frac{x^3}{3!} + o(x^4)}.$$

On factorise par le monôme de plus petit degré au dénumérateur :

$$\frac{\arcsin(x) - x}{\sin(x) - x} = \frac{1}{-\frac{x^3}{3!}}\frac{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 + o(x)} = \frac{-1 + o(x)}{1 + o(x)}.$$

Faites attention : les $o(x^4)$ sont devenus des $o(x)$, ce qui n'est pas une bonne nouvelle car on a seulement obtenu on DL au premier ordre :

$$\frac{\arcsin(x) - x}{\sin(x) - x} = \frac{-1 + o(x)}{1 + o(x)} = -1 + o(x).$$

Ce qu'il faut faire : commencer avec des DL de $\arcsin(x) - x$ et de $\sin(x) - x$ à des ordres plus élevés, à l'ordre $4 + 3 = 7$. Cela donne :

$$\arcsin(x) - x = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^7) \text{ et } \sin(x) - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7).$$

D'où

$$\frac{\arcsin(x) - x}{\sin(x) - x} = \frac{\frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^7)}{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)} = \frac{1}{-\frac{x^3}{3!}}\frac{\frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^7)}{1 - \frac{3!x^2}{5!} + \frac{3!x^4}{7!} + o(x^4)} = \frac{-1 + \frac{3\cdot 3!x^2}{40} + \frac{5\cdot 3!x^4}{112} + o(x^4)}{1 - \frac{3!x^2}{5!} + \frac{3!x^4}{7!} + o(x^4)}.$$

On calcule maintenant le DL de $\dfrac{1}{1 - \frac{3!x^2}{5!} + \frac{3!x^4}{7!} + o(x^4)}$ en 0 à l'ordre 4 à l'aide du théorème de composition des DL :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 - \frac{3!x^2}{5!} + \frac{3!x^4}{7!} + o(x^4)} \\
&\quad = 1 + \left(\frac{3!x^2}{5!} - \frac{3!x^4}{7!}\right) + \left(\frac{3!x^2}{5!} - \frac{3!x^4}{7!}\right)^2 + \left(\frac{3!x^2}{5!} - \frac{3!x^4}{7!}\right)^3 + \left(\frac{3!x^2}{5!} - \frac{3!x^4}{7!}\right)^4 + o(x^4) \\
&\qquad = 1 + \frac{x^2}{20} + \left(-\frac{3!}{7!} + \frac{3!^2}{5!^2}\right)x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

D'où, en multipliant les DL :

$$\frac{\arcsin(x) - x}{\sin(x) - x} = \left(-1 + \frac{3\cdot 3!x^2}{40} + \frac{5\cdot 3!x^4}{112}\right)\left(1 + \frac{x^2}{20} + \left(-\frac{3!}{7!} + \frac{3!^2}{5!^2}\right)x^4\right) + o(x^4).$$

On conclut alors par un calcul direct montrant que

$$\left(-1 + \frac{3\cdot 3!x^2}{40} + \frac{5\cdot 3!x^4}{112}\right)\left(1 + \frac{x^2}{20} + \left(-\frac{3!}{7!} + \frac{3!^2}{5!^2}\right)x^4\right) = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{7x^4}{24} + \text{ termes de deg. } > 4$$

8. On commence par :
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$
d'où
$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3).$$
Remarquons qu'on a fait un DL à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$ pour obtenir un DL à l'ordre 3 de $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
Le calcul du DL de $\ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$ cherché s'en déduit par composition des DL : on a
$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)$$
et
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$
donc, par composition de DL,
$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 + o(x^3)$$
et on en déduit le résultat pas un calcul direct montrant que
$$\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 = -\frac{x}{2} + \frac{5x^2}{24} - \frac{x^3}{8} + \text{ termes de deg.} > 3.$$

9. On a
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$
donc
$$e^{\sqrt{1+x}} = e^{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)} = e \cdot e^{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)}.$$
Or, le DL en $u=0$ à l'ordre 3 de l'exponentielle est donné par
$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3).$$
Par composition des DL, on obtient
$$e^{\sqrt{1+x}} = e \cdot \left(1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)^3 + o(x^3)\right)$$
et le résultat s'en déduit en remarquant que
$$1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\right)^3 = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{48} + \text{ termes de deg.} > 3.$$

10. Voici les grandes lignes des calculs. Ecrivez les détails pour vérifier que vous avez bien compris. On écrit
$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2} = \exp\left(\frac{3}{x^2}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right)$$
Puis
- on calcule le DL de $\sin(x)$ en 0 à l'ordre 6 ;
- puis, par composition de DL, on en déduit le DL de $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ en 0 à l'ordre 5 ;
- on en déduit le DL de $\dfrac{3}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ en 0 à l'ordre 3 ;
- en appliquant à nouveau la composition des DL, on obtient (enfin !) le résultat.

Exercice 5. Démontrer les résultats suivants :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$.
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{1/3}-1-\sin(x)}{1-\cos(x)} = -2 .$$
4. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)-2\sinh(2x)+\sinh(3x)}{\ln(1+x+2x^2)+\sqrt{1-2x}-1-x^2} = -\frac{12}{13} .$$

Indication 4. *On calculera des DL en* 0 *des numérateurs et dénominateurs. On commencera par se demander à quel ordre il faut calculer ces DL.*

Correction.

1. A quel ordre doit-on faire les DL ? Commençons par faire simple : calculons les DL à l'ordre 1. On a $e^x = 1+x+o(x)$, donc $e^{x^2} = 1+x^2+o(x^2) = 1+o(x)$. On a $\cos(x) = 1+o(x)$. Ainsi :
$$\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-1+o(x)}{x^2} = \frac{o(x)}{x^2} = o(1/x).$$
Ceci ne permet pas de conclure : on ne peut rien dire de la limite en 0 d'un $o(1/x)$ (forme indéterminée). Poussons les DL à l'ordre 2. On a $e^x = 1+x+o(x)$, donc $e^{x^2} = 1+x^2+o(x^2)$. On a $\cos(x) = 1-x^2/2+o(x^2)$. Ainsi :
$$\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2} = \frac{(1+x^2)-(1-x^2/2)+o(x^2)}{x^2} = \frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2}+o(1).$$
On peut maintenant conclure : $\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$ tend vers $3/2$ lorsque x tend vers 0.
2. On a
$$\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}.$$
Or $\sin(x) = x-x^3/6+o(x^4)$ et donc $\sin^2(x) = (x-x^3/6)^2+o(x^4) = x^2-x^4/3+o(x^4)$ et $x^2\sin^2(x) = x^4+o(x^4)$. Il en résulte que
$$\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4/3+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \frac{1/3+o(1)}{1+o(1)},$$
d'où le résultat.
3. Ce cas et les suivants se traitent comme les précédents, seuls les calculs changent. Comment savoir à quel ordre faire les DL ? En regardant les deux exemples déjà traités, on voit que la réponse est la suivante : cet ordre est le plus petit entier n tel que le DL à l'ordre n du dénominateur soit de la forme $f(x) = cx^n+o(x^n)$ avec $c \neq 0$.
Rappelons que $(1+3x)^{1/3} = 1+x-x^2+o(x^2)$ et $\sin(x) = x+o(x^2)$ et $\cos(x) = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$
On a
$$\frac{(1+3x)^{1/3}-1-\sin(x)}{1-\cos(x)} = \frac{(1+x)-1-x+o(x^2)}{1-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = \frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = \frac{-1+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)}.$$
d'où le résultat.
4. On a $\sinh(x) = x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$, $\sqrt{1-2x} = 1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$, et aussi $\ln(1+x+2x^2) = x+\frac{3}{2}x^2+2x^3+o(x^3)$.
On a

$$\frac{\sinh(x)-2\sinh(2x)+\sinh(3x)}{\ln(1+x+2x^2)+\sqrt{1-2x}-1-x^2} = \frac{x+\frac{x}{3!}-2(2x+\frac{(2x)^3}{3!})+3x+\frac{(3x)^3}{3!}+o(x^3)}{(x+\frac{3}{2}x^2+2x^3)+(1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2})+o(x^3)-1-x^2}$$

$$= \frac{\frac{x^3}{6}-\frac{8x^3}{3}+\frac{9x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{-13}{6}x^3+o(x^3)} = \frac{\frac{12}{6}x^3+o(x^3)}{\frac{-13}{6}x^3+o(x^3)} = \frac{\frac{12}{6}+o(1)}{\frac{-13}{6}+o(1)}$$

d'où le résultat.

Exercice 6. Démontrer les résultats suivants exprimant des développements asymptotiques en $+\infty$:

1. $\displaystyle \frac{1}{2+x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$
2. $\displaystyle \frac{1+x^2}{(1+x)(2-x)}=-1-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}-\frac{6}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$
3. $\displaystyle \frac{1}{x\sin(1/x)}=1+\frac{1}{6x^2}+\frac{7}{360x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$
4. $\displaystyle \frac{1}{x\arctan(1/x)}=1+\frac{1}{3x^2}-\frac{4}{45x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$

Indication 5. *On pourra se ramener à des calculs de DL en* 0 *en utilisant le changement de variable* $u=1/x$.

Correction. Dans ce qui suit, on notera $u=x^{-1}$.

1. On a
$$\frac{1}{2+x}=\frac{u}{2u+1}.$$
Pour montrer que
$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
il suffit donc de montrer qu'on a le DL suivant en $u=0$:
$$\frac{u}{2u+1}=u-2u^2+4u^3+o(u^3),$$
ce que l'on sait faire ! On sait que
$$\frac{1}{2u+1}=1-(2u)+(2u)^2+o(u^2)=1-2u+4u^2+o(u^2)$$
et donc
$$\frac{u}{2u+1}=u-2u^2+4u^3+o(u^3).$$
2. On a
$$\frac{1+x^2}{(1+x)(2-x)}=\frac{u^2+1}{(u+1)(2u-1)}=-\frac{u^2+1}{1-u-2u^2}.$$
Il s'agit donc de montrer que l'on a le DL suivant en $u=0$:
$$-\frac{u^2+1}{1-u-2u^2}=-1-u-4u^2-6u^3+o(u^3).$$
Par composition des DL, on a
$$\frac{1}{1-u-2u^2}=\frac{1}{1-(u+2u^2)}=1+\big(u+2u^2\big)+\big(u+2u^2\big)^2+\big(u+2u^2\big)^3+o(u^3)=1+u+3u^2+5u^3+o(u^3).$$
Donc
$$-\frac{u^2+1}{1-u-2u^2}=-(u^2+1)(1+u+3u^2+5u^3)+o(u^3)=-(1+u+4u^2+6u^3)+o(u^3).$$
3. On a
$$\frac{1}{x\sin(\frac{1}{x})}=\frac{u}{\sin(u)}.$$
Rappelons que $\sin(u)=u-\dfrac{u^3}{3!}+\dfrac{u^5}{5!}+o(u^5)$,

on a donc,

$$\frac{u}{\sin(u)} = \frac{u}{u(1-\frac{u^2}{3!}+\frac{u^4}{5!}+o(u^4))} = \frac{1}{1-\frac{u^2}{3!}+\frac{u^4}{5!}+o(u^4)} = 1+(\frac{u^2}{3!}-\frac{u^4}{5!})+\Big(\frac{u^2}{3!}\Big)^2 + \text{ termes de deg.} > 4.$$

$$\frac{u}{\sin(u)} = 1+\frac{u^2}{6}+\frac{7u^4}{360}+o(u^4),$$

d'où le résultat.

4. La méthode est encore la même pour cet exemple : utiliser le changement de variable $u = x^{-1}$ pour se ramener à un calcul de DL en $u = 0$ et le calcul de DL est similaire à la question précédente. Rappelons que $\arctan(u) = u - \dfrac{u^3}{3} + \dfrac{u^5}{5} + o(u^5)$.

Exercice 7. Considérons la fonctions $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x^2-1}$.

1. Montrer qu'en $+\infty$, on a
$$\frac{f(x)}{x} = 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$
2. Déduire de la question précédente que la droite $y = x + 1$ est une asymptote à f en $+\infty$.
3. Quelle est la position de cette asymptote par rapport au graphe de f au voisinage de $+\infty$?

Correction. 1. En posant $u = x^{-1}$, tout revient à montrer qu'on a le DL suivant en $u = 0$:

$$uf(u^{-1}) = 1+u-\frac{1}{3}u^3+o\left(u^3\right).$$

On a, pour $u \in]0, 1]$,

$$uf(u^{-1}) = ue^u\sqrt{u^{-2}-1} = e^u\sqrt{1-u^2}.$$

Or, on a

$$e^u = 1+u+u^2/2+u^3/6+o(u^3) \text{ et } \sqrt{1-u^2} = 1-u^2/2+o(u^3)$$

donc

$$uf(u^{-1}) = (1+u+u^2/2+u^3/6)(1-u^2/2)+o(x^3) = 1+u-\frac{1}{3}u^3+o\left(u^3\right).$$

2. En multipliant par x le développement asymptotique de la première question, on obtient sans peine :

$$f(x)-(1+x) = -\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

ce qui montre que $f(x) - (1 + x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Le terme $-\dfrac{1}{3x^2}$ montre que l'asymptote $y = 1 + x$ est au-dessus du graphe de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 8. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + x)$.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction f entre 0 et $x > 0$.
2. Montrer l'encadrement suivant, valable pour tout $x > 0$:
$$x-\frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$
3. En déduire une valeur approchée de $\ln(1, 003)$ à 10^{-8} près.

Indication 6. *Pour la question 2, il s'agit d'encadrer le reste dans la formule de Taylor-Lagrange obtenue à la question 1.*
Pour le question 3, on pourra remarquer que $(0, 003)^3/3$ *est inférieur à* 10^{-8}.

Correction. 1. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et x garantit l'existence de $\xi_x \in]0, x[$ tel que

$$\ln(1+x) = x-x^2/2+f^{(3)}(\xi_x)x^3/6.$$

2. On a $f^{(3)}(\xi_x) = 2/(1+\xi_x)^3$ et donc $0 < f^{(3)}(\xi_x) < 2$ donc $0 < f^{(3)}(\xi_x)x^3/6 < x^3/3$. Par conséquent,

$$x - \frac{x^2}{2} \ < \ \ln(1+x) = x - x^2/2 + f^{(3)}(\xi_x)x^3/6 \ < \ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

3. On a donc

$$0 < \ln(1+x) - \big(x - x^2/2\big) < x^3/3.$$

Puisque $0,003^3/3 < 10^{-8}$, $0,003 - 0,003^2/2 = 0.0029955$ est une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 9. Utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre deux pour montrer que $\frac{1}{\sqrt{101}}$ vaut $\frac{1}{10} - \frac{1}{2000} = 0,0995$ à la tolérance 5×10^{-6} près.

Indication 7. *On pourra appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre* 2 *pour la fonction* $x^{-1/2}$ *entre* 100 *et* 101*.*

Correction. Par la formule de Taylor-Lagrange, il existe $\xi \in]100, 101[$ tel que

$$f(101) = \frac{1}{\sqrt{100}} - \frac{1}{2(100)^{\frac{3}{2}}}(101-100) + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(101-100)^2 = \frac{1}{10} - \frac{1}{2000} + \frac{3}{8\,\xi^{\frac{5}{2}}},$$

Et donc,

$$f(101) - (\frac{1}{10} - \frac{1}{2000}) \leq \frac{3}{8\,\xi^{\frac{5}{2}}}$$

puisque $x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$ est décroissante et $\xi \in]100, 101[$ on a $\frac{1}{\xi^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{1}{100^{\frac{5}{2}}}$, et donc

$$0 < \frac{3}{8}\frac{1}{\xi^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{3}{8}\frac{1}{100^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{3}{8}\frac{1}{10^5} \leq \frac{5}{10}\frac{1}{10^5} = 5 \times 10^{-6}.$$

Exercice 10.
1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour l'application exponentielle en 0 à l'ordre $n \geq 1$.
2. Montrer que pour tout $u \in]0, 1]$, $\exp(u)(1-u)^n < 1$.
3. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$

Voici deux applications de cet encadrement.

4. Application numérique : donner une approximation à 10^{-4} près de e.
5. Application arithmétique : montrer que e est irrationnel (on raisonnera par l'absurde et on utilisera l'encadrement ci-dessus pour aboutir à une contradiction).

Indication 8. *Pour la 2, on pourra faire une étude de fonction.*
Pour la 3, on pourra appliquer la formule obtenue en 1 et appliquer ensuite la majoration obtenue en 2.
Pour la 5, on pourra raisonner par l'absurde en supposant que e est rationnel, c'est-à-dire que $e = \frac{p}{q}$ *pour certains entiers* $p, q > 0$*. On utilisera alors l'inégalité prouvée en 3 avec* $n = q$ *pour obtenir à une contradiction.*

Correction.
1. La formule de Taylor avec reste intégral pour l'application exponentielle en 0 à l'ordre $n \geq 1$ s'écrit

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{\exp(u)}{n!}(x-u)^n du.$$

2. On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(u) = \exp(u)(1-u)^n$. Cette fonction est dérivable et on a $f'(u) = \exp(u)(1-u)^n - n\exp(u)(1-u)^{n-1} = \exp(u)(1-u)^{n-1}(1-u-n)$, qui est < 0 pour $u \in]0, 1[$. La fonction f est donc strictement décroissante ; elle est donc strictement majorée par $f(0) = 1$ sur $]0, 1]$, d'où le résultat.

3. On déduit de la question précédente que
$$\int_0^1 \frac{\exp(u)}{n!}(1-u)^n du < \frac{1}{n!}\int_0^1 du = \frac{1}{n!}.$$
De plus, on a bien sûr
$$0 < \int_0^1 \frac{\exp(u)}{n!}(1-u)^n du$$
puisque l'intégrande est une fonction continue positive non identiquement nulle. On déduit alors de la question 1 avec $x=1$ que
$$0 < e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{\exp(u)}{n!}(1-u)^n du < \frac{1}{n!}.$$

4. D'après la question 3, si n est un entier tel que $1/n! \leq 10^{-4}$, alors $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ est une approximation de e à 10^{-4} près. On peut par exemple prendre $n=8$; je vous laisse le soin de calculer l'approximation correspondante $\sum_{k=0}^{8}\frac{x^k}{k!}$ de e.

5. Raisonnons par l'absurde : supposons e rationnel, c'est-à-dire que $e=\frac{p}{q}$ pour certains entiers $p,q>0$. Les inégalités de la questions 3 pour $n=q$ garantissent que
$$q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} < (q-1)!p < q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}+1.$$
Mais $q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}$ est un entier ; on a donc que l'entier $(q-1)!p$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est absurde.

Exercice 11. Inégalité de Kolmogorov Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que
$$|f| \leq M_0 \text{ et } |f''| \leq M_2$$
pour certaines constantes $M_0, M_2 > 0$. Montrer qu'on a
$$|f'| \leq M_1 = 2\sqrt{M_0M_2}.$$

Indication 9. *Soit $x \geq 0$ et $h > 0$. On pourra écrire la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ et en déduire que*
$$|f'| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
On cherchera ensuite à minimiser $\frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.

Correction. Soit $x \geq 0$ et $h > 0$. D'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]x, x+h[$ tel que
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2}f''(c),$$
et donc
$$f'(x) = \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2}f''(c)\right).$$
On obtient donc
$$|f'(x)| \leq \frac{1}{h}\left(|f(x+h)| + M_0 + \frac{h^2}{2}|f''(c)|\right) \leq \frac{1}{h}\left(M_0 + M_0 + \frac{h^2}{2}M_2\right) = \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}. \qquad (1)$$
Nous allons maintenant choisir $h>0$ de telle sorte que $\frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ soit le plus petit possible. Notons $g : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$. Cette fonction est dérivable de dérivée $g'(h) = -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2}$; $g'(h)$ s'annule en $h_0 = 2\sqrt{M_0/M_2}$, est <0 sur $]0, h_0[$ et >0 sur $]h_0, +\infty[$. Il suit que g admet un minimum en h_0, et on a $g(h_0) \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.
Le résultat est donc une conséquence de l'inégalité (1) appliqué en $h = h_0$.