Feuille 10 : Comparaisons de fonctions, développements limités et asymptotiques

Exercice 1. Les affirmations suivantes concernent des comparaisons de fonctions en 0. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. $x^3 = O(x^2)$
2. $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = O(x^2)$
3. $2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2} = o(\sqrt{|x|})$
4. $\dfrac{1}{2x^3 + \sqrt{x^4 + x^2}} = o(1/\sqrt{|x|})$
5. $\ln(|x|) = o(1/|x|)$
6. Si $f(x) = o(x)$ et $g(x) = o(x)$ alors $f(x) = g(x)$.

Indication 1. *Considérons deux fonction f, g à valeurs réelles définies sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$.*
Pour décider si $f = o(g)$ en 0 lorsque g est une fonction ne s'annulant pas sur un voisinage épointé de 0, il est souvent commode de considérer le quotient f/g : dans ce cas, on a $f = o(g)$ si et seulement si (f/g tend vers 0 en 0 et $f(0) = 0$ si $g(0) = 0$).
Pour déterminer si on a $f = O(g)$ en 0 lorsque g est une fonction ne s'annulant pas sur un voisinage épointé de 0, il est souvent commode de considérer le quotient f/g : dans ce cas, on a $f = O(g)$ si et seulement si ($|f/g|$ est majorée sur un voisinage épointé de 0 et $f(0) = 0$ si $g(0) = 0$).
Si f ou g n'est pas définie en 0, mais seulement sur un voisinage épointé de 0, ce qui précède vaut encore en supprimant la condition "$f(0) = 0$ si $g(0) = 0$" qui n'a pas de sens dans ce cas.

Exercice 2. Reprendre l'exercice précédent en considérant que les comparaisons ont lieu en $+\infty$ (plutôt qu'en 0).

Indication 2. *Pour déterminer si on a $f = o(g)$ en $+\infty$ lorsque g est une fonction ne s'annulant pas sur un voisinage de $+\infty$, il est souvent commode de considérer le quotient f/g : dans ce cas, on a $f = o(g)$ si et seulement si f/g tend vers 0 en $+\infty$.*
Pour déterminer si on a $f = O(g)$ en $+\infty$ lorsque g est une fonction ne s'annulant pas sur un voisinage de $+\infty$, il est souvent commode de considérer le quotient f/g : dans ce cas, on a $f = O(g)$ si et seulement si $|f/g|$ est majorée sur un voisinage de $+\infty$.

Exercice 3. Soit f une application à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. Les affirmations suivantes concernent les propriétés de f au voisinage de 0. Parmi elles, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses, et pourquoi ?

1. Si $f(x) = x^3 + o(x^3)$ alors $f(x) = o(x^3)$.
2. Si $f(x) = x^2 + o(x^3)$ alors $f(1 + x) = (1 + x)^2 + o(x^3)$.
3. Si $f(x) = x^2 + o(x^3)$ alors $f(x(1 + x)) = (x(1 + x))^2 + o(x^3)$.

Exercice 4. Démontrer les développements limités en 0 suivants :

1. $\cos(x)\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$.
2. $\dfrac{1}{1 - \sin(x)} = 1 + x + x^2 + \dfrac{5x^3}{6} + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)$.
3. $\dfrac{1}{1 - \arctan(x)} = 1 + x + x^2 + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^4}{3} + o(x^4)$.
4. $\dfrac{1}{1 + \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{x^2}{36} + o(x^2)$.
5. $\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1 - x^2}} = x + \dfrac{2x^3}{3} + o(x^4)$.
6. $\arcsin(\ln(1 + x^2)) = x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$.
7. $\dfrac{\arcsin(x) - x}{\sin(x) - x} = -1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{7x^4}{24} + o(x^4)$.
8. $\ln\left(\dfrac{\ln(1 + x)}{x}\right) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{5x^2}{24} - \dfrac{x^3}{8} + o(x^3)$.
9. $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}} = \mathrm{e} + \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{\mathrm{e}x^3}{48} + o(x^3)$.
10. $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} - \dfrac{x^2}{60\sqrt{\mathrm{e}}} + o(x^3)$.

Indication 3. *Afin de déterminer explicitement le DL en* 0 *à l'ordre* n *d'une fonction* f*, il est tentant de calculer directement le polynôme de Taylor de* f *en* 0 *à l'ordre* n *(en calculant donc au préalable* $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$*). Cette méthode, bien que tout à fait valable, est rarement utilisée car elle conduit souvent à des calculs énormes. Dans la pratique, on utilise plutôt les théorèmes du cours concernant les opérations sur les DL (somme, produit, composition, etc) combinés aux DL classiques (ceux des fonctions sinus, cosinus, exponentielles, etc ; voir le cours). C'est ce qu'il faut faire dans cet exercice.*

Exercice 5. Démontrer les résultats suivants :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{3}{2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{3}$.
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{1/3} - 1 - \sin(x)}{1-\cos(x)} = -2 \ .$$
4. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x) - 2\sinh(2x) + \sinh(3x)}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2} = -\frac{12}{13} \ .$$

Indication 4. *On calculera des DL en* 0 *des numérateurs et dénominateurs. On commencera par se demander à quel ordre il faut calculer ces DL.*

Exercice 6. Démontrer les résultats suivants exprimant des développements asymptotiques en $+\infty$:

1. $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
2. $\dfrac{1+x^2}{(1+x)(2-x)} = -1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{6}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
3. $\dfrac{1}{x\sin(1/x)} = 1 + \dfrac{1}{6x^2} + \dfrac{7}{360x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.
4. $\dfrac{1}{x\arctan(1/x)} = 1 + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{4}{45x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.

Indication 5. *On pourra se ramener à des calculs de DL en* 0 *en utilisant le changement de variable* $u = 1/x$.

Exercice 7. Considérons la fonctions $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x^2-1}$.

1. Montrer qu'en $+\infty$, on a
$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$
2. Déduire de la question précédente que la droite $y = x+1$ est une asymptote à f en $+\infty$.
3. Quelle est la position de cette asymptote par rapport au graphe de f au voisinage de $+\infty$?

Exercice 8. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction f entre 0 et $x > 0$.
2. Montrer l'encadrement suivant, valable pour tout $x > 0$:
$$x - \frac{x^2}{2} \ < \ \ln(1+x) \ < \ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$
3. En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Indication 6. *Pour la question 2, il s'agit d'encadrer le reste dans la formule de Taylor-Lagrange obtenue à la question 1.*
Pour le question 3, on pourra remarquer que $(0,003)^3/3$ *est inférieur à* 10^{-8}.

Exercice 9. Utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre deux pour montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{101}}$ vaut $\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{2000} = 0,0995$ à la tolérance 5×10^{-6} près.

Indication 7. *On pourra appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre* 2 *pour la fonction* $x^{-1/2}$ *entre* 100 *et* 101.

Exercice 10. 1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour l'application exponentielle en 0 à l'ordre $n \geq 1$.

2. Montrer que pour tout $u \in]0,1]$, $\exp(u)(1-u)^n < 1$.
3. En déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.$$

Voici deux applications de cet encadrement.

4. Application numérique : donner une approximation à 10^{-4} près de e.
5. Application arithmétique : montrer que e est irrationnel (on raisonnera par l'absurde et on utilisera l'encadrement ci-dessus pour aboutir à une contradiction).

Indication 8. *Pour la 2, on pourra faire une étude de fonction.*
Pour la 3, on pourra appliquer la formule obtenue en 1 et appliquer ensuite la majoration obtenue en 2.
Pour la 5, on pourra raisonner par l'absurde en supposant que e est rationnel, c'est-à-dire que $e = \frac{p}{q}$ *pour certains entiers* $p, q > 0$. *On utilisera alors l'inégalité prouvée en 3 avec* $n = q$ *pour obtenir à une contradiction.*

Exercice 11. Inégalité de Kolmogorov Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que
$$|f| \leq M_0 \text{ et } |f''| \leq M_2$$
pour certaines constantes $M_0, M_2 > 0$. Montrer qu'on a
$$|f'| \leq M_1 = 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Indication 9. *Soit* $x \geq 0$ *et* $h > 0$. *On pourra écrire la formule de Taylor-Lagrange entre* x *et* $x+h$ *et en déduire que*
$$|f'| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$
On cherchera ensuite à minimiser $\frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.