Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des Mathématiques II

Semestre de printemps 2019–2020

Feuille 4 : Intégration sur un segment

Exercice 1. Considérons la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1,1]$.

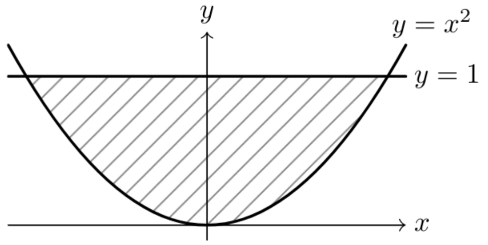
1. Pour $x \in [-1,1]$ calculer $x^2 + f(x)^2$. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, quelle est la région du plan parcourue par le point $(x, f(x))$ lorsque x décrit l'intervalle $[-1,1]$?
2. Dessiner le graphe de f.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Indication pour l'exercice 1. 1. On peut commencer par remarquer que $(x, f(x))$ appartient à un cercle dont on précisera le rayon et le centre.

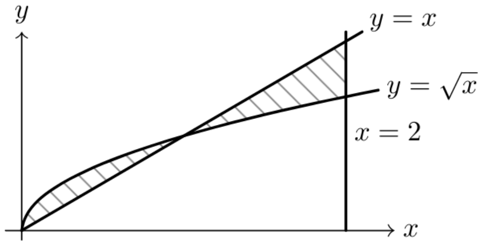
2. Utiliser 1.
3. Interpréter géométriquement $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Déterminer l'aire des domaines hachurés représentés ci-dessous.

1.



2.



Indication pour l'exercice 2. 1. Commencer par calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$.

2. Travailler sur $[0,1]$ puis sur $[1,2]$.

Exercice 3. Déterminer sans aucun calcul la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On pourra s'aider d'un dessin.

Indication pour l'exercice 3. La fonction $x \to \sin(x)\sqrt{3+x^2}$ est impaire.

Exercice 4. On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$.

1. Sans faire de calcul, et grâce à des considérations géométriques, montrer que
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1/2.$$
2. On se propose de retrouver ce résultat en faisant appel à la définition de l'intégrale de Riemann.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions en escalier u_n et v_n sur $[0,1]$ par
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[, \quad u_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n(x) = f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$
   et $u_n(1) = v_n(1) = 1$. Faire un dessin des fonctions f, u_n et v_n. Montrer que, par définition de l'intégrale de Riemann,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}.$$
   (b) En faisant tendre n vers $+\infty$, en conclure que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1/2$.
3. Finalement, retrouver le résultat d'une troisième manière en faisant appel au théorème fondamental de l'analyse.
4. Répéter les questions 2. et 3. avec, à la place de la fonction f, la fonction $g : x \mapsto x^2$ sur $[0,1]$.

Indication pour l'exercice 4. 1. Interpréter géométriquement $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$.

2. (a) Remarquer que $u_n \leqslant f \leqslant v_n$ et appliquer les propriétés des intégrales de Riemann.
   (b) On rappelle que
$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$
3. Calcul direct.
4. On rappelle que
$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Exercice 5. Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$,
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n^3}}$,
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}$,
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+nk}}$,
5. $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}}$.
   Indication : étudier la suite $(\ln u_n)$.

Indication pour l'exercice 5. Appliquer le résultat sur les sommes de Riemann :
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[a,b]} f.$$

et

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[a,b]} f.$$

Exercice 6. Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Déterminer un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Indication pour l'exercice 6. Intuiter le résultat en calculant S_n pour $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$. Exprimer S_n en fonction d'une somme de Riemann.

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes sans utiliser de primitives :

1. $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$,
2. $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$,
3. $\displaystyle\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t$,
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t$.

Indication pour l'exercice 7. Appliquer le résultat sur les sommes de Riemann :
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[a,b]} f.$$

et

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[a,b]} f.$$

Pour (3) et (4), on pourra reconnaitre la somme d'une suite géométrique.

Exercice 8. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Indication pour l'exercice 8. Justifier, dans un premier temps, que f est bornée.

Exercice 9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Elle est donc bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes. On note $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le réel

$$I_n = \left(\int_a^b f(x)^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}.$$

1. Soit $\epsilon > 0$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\alpha^{\frac{1}{n}}(M - \epsilon) \leqslant I_n \leqslant (b-a)^{\frac{1}{n}} M.$$

2. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = M$.

Indication pour l'exercice 9. 1. On pourra utiliser le fait que f soit bornée pour montrer que $I_n \leqslant (b-a)^{\frac{1}{n}} M$.
Pour l'autre inégalité : noter que f est bornée et atteint ses bornes et appliquer deux fois la continuité de f. Conclure en utilisant la positivité de f.

2. Observer ce que donne l'inégalité prouvée à la question lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 10 (Lemme de Riemann-Lebesgues)**.** Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}t = 0,$$

1. pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en escalier,
2. pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Indication pour l'exercice 10. 1. On pourra commencer par les fonctions constantes puis généraliser aux fonctions en escalier en utilisant la relation de Chasles.

2. Utiliser un théorème d'approximation du cours.

Exercice 11 (Une fonction non intégrable)**.** Soit $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Soit g une fonction en escalier telle que $g \geqslant f$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) \geqslant 1$ (sauf éventuellement en ses points de discontinuité).
2. De la même manière, montrer que si h est une fonction en escalier $\leqslant f$, alors $h \leqslant 0$ (sauf éventuellement en ses points de discontinuité).
3. En déduire que

$$\inf \left\{ \int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x, \, g \text{ en escalier et } g \geqslant f \right\} = 1,$$
$$\sup \left\{ \int_0^1 h(x) \, \mathrm{d}x, \, h \text{ en escalier et } h \leqslant f \right\} = 0.$$

4. Conclure.

Indication pour l'exercice 11. 1. Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$, il existe un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a \leqslant q \leqslant b$.

2. Même raisonnement que (1) avec $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

3. Pour la borne inférieure, justifier l'inégalité « $\geqslant$ » par (1). Montrer que la valeur 1 est atteinte. Même raisonnement pour la borne supérieure.
4. Revenir à la définition de l'intégrale de Riemann.

Exercice 12. On rappelle le résultat suivant : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction Riemann intégrable, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{[a,b]} f.$$

En cours, cela a été démontré pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. L'objectif de cet exercice est de démontrer ce résultat lorsque f est croissante sur $[a,b]$. Considérons les sommes de Riemann suivantes :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right), \qquad S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S_n \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant S'_n.$$
2. Calculer $S'_n - S_n$.
3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \displaystyle\int_{[a,b]} f$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = \displaystyle\int_{[a,b]} f$.
4. Généraliser au cas d'une fonction décroissante, puis au cas d'une fonction monotone par morceaux sur $[a,b]$ (c'est-à-dire qu'il existe une partition finie de $[a,b]$ en intervalles sur chacun desquels la fonction est monotone).

Indication pour l'exercice 12. 1. Suivre la même démarche que dans l'exercice 4.
2. $S'_n = S_n + \dfrac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$.
3. Encadrer la suite S_n par deux suites ayant la même limite. Pour la limite de S'_n, utiliser (2).
4. Pour simplifier, considérer le cas où $[a,b] = [a = z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \ldots \cup [z_{p-1}, z_p = b]$. Si f_i est la restriction sur $[z_i, z_{i+1}[$, prolonger par 0 sur $[a,b]$ puis découper ce prolongement en une somme d'une fonction monotone et d'une fonction en escalier bien choisies.

Exercice 13. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Exprimer pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x)$ en fonction de valeurs prises par la fonction F.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

Indication pour l'exercice 13. Penser au nombre dérivé pour la question (2).

Exercice 14. On définit la fonction $F :]0,1[\to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in]0,1[\quad F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$

1. Pour $x \in]0,1[$, quel est le signe de $F(x)$?
2. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
3. Pour $x \in]0,1[$, montrer que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.
4. Pour $x \in]0,1[$, montrer les inégalités : $x^2 \ln(2) \leqslant F(x) \leqslant x \ln(2)$.
5. Montrer que l'on peut prolonger F par continuité sur $[0,1]$.

Indication pour l'exercice 14. 1. Attention à l'ordre $x \leqslant x^2$ dès que $x \in]0,1[$. Étudier le signe de la fonction intégrée.

2. Utiliser le théorème fondamental de l'analyse.
3. Utiliser à nouveau le théorème fondamental de l'analyse.
4. On a l'encadrement $0 < x \leqslant t \leqslant x^2 < 1$.
5. Utiliser (4).