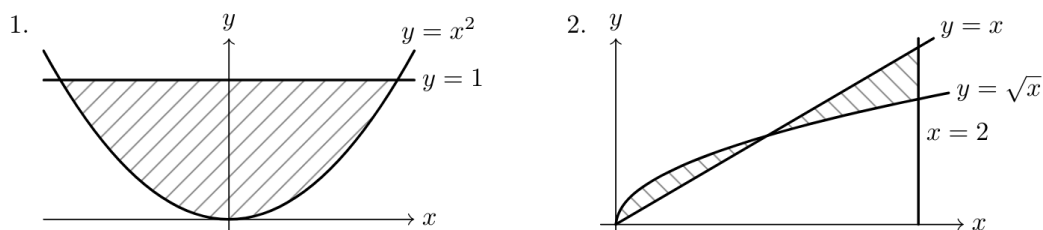


## Feuille 4 : Intégration sur un segment

**Exercice 1.** Considérons la fonction  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  pour tout  $x \in [-1, 1]$ .

1. Pour  $x \in [-1, 1]$  calculer  $x^2 + f(x)^2$ . Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , quelle est la région du plan parcourue par le point  $(x, f(x))$  lorsque  $x$  décrit l'intervalle  $[-1, 1]$  ?
2. Dessiner le graphe de  $f$ .
3. En déduire la valeur de  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

**Exercice 2.** Déterminer l'aire des domaines hachurés représentés ci-dessous.



**Exercice 3.** Déterminer sans aucun calcul la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \sqrt{3 + x^2} dx.$$

On pourra s'aider d'un dessin.

**Exercice 4.** On considère la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x$ .

1. Sans faire de calcul, et grâce à des considérations géométriques, montrer que

$$\int_0^1 f(x) dx = 1/2.$$

2. On se propose de retrouver ce résultat en faisant appel à la définition de l'intégrale de Riemann.

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit les fonctions en escalier  $u_n$  et  $v_n$  sur  $[0, 1]$  par

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x \in \left[ \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[ , \quad u_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n(x) = f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

et  $u_n(1) = v_n(1) = 1$ . Faire un dessin des fonctions  $f$ ,  $u_n$  et  $v_n$ . Montrer que, par définition de l'intégrale de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n}.$$

- (b) En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , en conclure que  $\int_0^1 f(x) dx = 1/2$ .
3. Finalement, retrouver le résultat d'une troisième manière en faisant appel au théorème fondamental de l'analyse.
4. Répéter les questions 2. et 3. avec, à la place de la fonction  $f$ , la fonction  $g : x \mapsto x^2$  sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 5.** Calculer la limite des suites suivantes :

$$1. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}},$$

$$2. u_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n^3}},$$

$$3. u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2},$$

$$4. u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + nk}},$$

$$5. u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}.$$

Indication : étudier la suite  $(\ln u_n)$ .

**Exercice 6.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n k^p$ . Déterminer un équivalent de  $S_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 7.** Calculer les intégrales suivantes sans utiliser de primitives :

$$1. \int_0^1 t dt,$$

$$2. \int_0^1 t^2 dt,$$

$$3. \int_0^1 e^t dt,$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt.$$

**Exercice 8.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0.$$

**Exercice 9.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et positive. Elle est donc bornée sur  $[a, b]$  et atteint ses bornes. On note  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère le réel

$$I_n = \left( \int_a^b f(x)^n dx \right)^{\frac{1}{n}}.$$

1. Soit  $\epsilon > 0$ , montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\alpha^{\frac{1}{n}} (M - \epsilon) \leq I_n \leq (b - a)^{\frac{1}{n}} M.$$

2. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = M$ .

**Exercice 10** (Lemme de Riemann-Lebesgues). Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0,$$

1. pour toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en escalier,

2. pour toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux.

**Exercice 11** (Une fonction non intégrable). Soit  $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Soit  $g$  une fonction en escalier telle que  $g \geq f$ . Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $g(x) \geq 1$  (sauf éventuellement en ses points de discontinuité).
2. De la même manière, montrer que si  $h$  est une fonction en escalier  $\leq f$ , alors  $h \leq 0$  (sauf éventuellement en ses points de discontinuité).
3. En déduire que

$$\inf \left\{ \int_0^1 g(x) dx, g \text{ en escalier et } g \geq f \right\} = 1,$$

$$\sup \left\{ \int_0^1 h(x) dx, h \text{ en escalier et } h \leq f \right\} = 0.$$

4. Conclure.

**Exercice 12.** On rappelle le résultat suivant : si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction Riemann intégrable, alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left( a + k \frac{b-a}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f.$$

En cours, cela a été démontré pour  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ . L'objectif de cet exercice est de démontrer ce résultat lorsque  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ . Considérons les sommes de Riemann suivantes :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left( a + k \frac{b-a}{n} \right), \quad S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f \left( a + k \frac{b-a}{n} \right).$$

1. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$S_n \leq \int_{[a,b]} f \leq S'_n.$$

2. Calculer  $S'_n - S_n$ .

3. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_{[a,b]} f$  puis que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = \int_{[a,b]} f$ .

4. Généraliser au cas d'une fonction décroissante, puis au cas d'une fonction monotone par morceaux sur  $[a, b]$  (c'est-à-dire qu'il existe une partition finie de  $[a, b]$  en intervalles sur chacun desquels la fonction est monotone).

**Exercice 13.** Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on note

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On définit  $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  par : pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ .

1. Exprimer pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $g(x)$  en fonction de valeurs prises par la fonction  $F$ .
2. Montrer que  $g$  est prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 14.** On définit la fonction  $F : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :  $\forall x \in ]0, 1[ \quad F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ .

1. Pour  $x \in ]0, 1[$ , quel est le signe de  $F(x)$ ?
2. Montrer que  $F$  est dérivable en tout point de  $]0, 1[$  et calculer sa dérivée.

3. Pour  $x \in ]0, 1[$ , montrer que  $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln(2)$ .

4. Pour  $x \in ]0, 1[$ , montrer les inégalités :  $x^2 \ln(2) \leq F(x) \leq x \ln(2)$ .

5. Montrer que l'on peut prolonger  $F$  par continuité sur  $[0, 1]$ .