Feuille 3 : Espaces Vectoriels

Exercice 1. Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3, E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 7y = z\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - z^2 = 0\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$.
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : zx + y = 0\}$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficient réels. Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3, E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) = 3\}$.
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq 3\}$.
3. $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq 2 \text{ et } P(1) = 0\}$.
4. $E_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = 1\}$.

Exercice 3. Soient a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle I, avec $\forall x \in I, a(x) \neq 0$. On appelle E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x) = 0.$$

Montrer que E est un sous espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soient $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ et $d = (5, 0, -7)$. On considère les sous-espaces $E = \text{Vect}(a, b) \in \mathbb{R}^3$ et $F = \text{Vect}(c, d) \in \mathbb{R}^3$ Montrer que $E = F$.

Exercice 5. Soient les fonctions réelles $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos x \cos 2x$ et $h(x) = \sin x \sin 2x$. Déterminer $\text{Vect}(f, g, h)$.

Exercice 6. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Soient $a = (1, -2, 3)$ et $b = (2, 1, -1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On pose $F = \text{Vect}(a, b)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $E \cap F$.
3. A-t-on $E \oplus F$?

Exercice 7. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\}$
$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$
$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = y\}$
$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$

1. Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$; donner une base et la dimension de chacun d'eux.

2. Indiquer la nature géométrique de chaque F_i.
3. Déterminer $F_2 + F_3$.
4. Déterminer $F_2 \cap F_3$. Est-ce que F_2 et F_3 sont supplémentaires?
5. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.
6. Montrer que F_1 et F_4 sont supplémentaires.

Exercice 8. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ à n lignes et n colonnes. Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient ${}^tA = -A$. Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient ${}^tA = A$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour toutes matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\dfrac{A + {}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $\dfrac{A - {}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. A-t-on $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, décomposer A en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Exercice 9. Etudier la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants:

1. $u = (2, -3)$, $v = (-1, 1)$.
2. $u = (-6, 2)$, $v = (9, -3)$.
3. $u = (m + 1, -1)$, $v = (-3, m - 1)$ où $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées?

1. $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, -1)$.
2. $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, -1, 1)$.
3. $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 0, 1)$, $z = (-1, 1, 1)$.
4. $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -1, 2)$, $w = (1, -2, -1)$.

Les familles données ci-dessus sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Lorsque que la réponse est négative on déterminera le sous-espace engendré et sa nature géométrique.

Exercice 11. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ des applications de classe C^∞ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que les familles suivantes sont libres:
a) $\{x \to x, x \to e^x\}$ b) $\{x \to e^x, x \to e^{2x}\}$ c) $\{x \to x, x \to \sin x\}$ d) $\{x \to \cos x, x \to \sin x\}$.

Exercice 12. Soit $a \in R$ et E_a le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\{(1, 1, a), (1, a, 1), (a, 1, 1)\}$. Suivant la valeur de a, déterminer la dimension de E_a.

Exercice 13. Pourquoi les polynômes $1, X, X(X - 1), X(X - 1)(X - 2)$ forment-ils une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3? Exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 14. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P = a + (2a-3b)X + bX^2, a, b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2) et en donner une base.

Exercice 15. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de E. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 16. Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$ et $F = \text{Vect}((1, 2, -3))$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et en déterminer une base.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

Exercice 17. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants:
$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$
$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + t\}$
$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\}$

1. Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, donner une base et la dimension de chacun d'eux.
2. Quelle est la dimension de $F + G$?
3. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 18. Soit F le sous-espace vectoriel de engendré par $u = (2, -3, 1)$ et $v = (2, -2, 1)$.

1. Quelle est la dimension de F?
2. Démontrer que $w_1 = (0, 1, 0) \in F$ mais que $w_2 = (0, 0, 1) \notin F$.
3. Calculer les composantes du vecteur $w_3 = (0, 4, 0)$ dans la base (u, v).
4. Exprimer le fait qu'un vecteur (x, y, z) appartient à F par une équation en x, y, z.
5. Indiquer la nature géométrique de F.

Exercice 19. Soient $E = \text{Vect}(a, b, c, d)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ où $a = (2, -1, -1), b = (-1, 2, 3), c = (1, 4, 7), d = (1, 1, 2)$.

1. Est-ce que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que (a, b) est une base de E.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant E.
4. Compléter une base de E en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0, y + t = 0\}$ Soient $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 0, 1, 0)$ et $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. On admettra que E est un espace vectoriel.

1. Donner une base de E et en déduire sa dimension.
2. Déterminer une base de F .
3. Donner une (ou plusieurs) équation(s) qui caractérise(nt) F.
4. Donner une famille génératrice de $E + F$.
5. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.

Exercice 21. Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $F \subset E$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence:

$$u_{n+2} = u_n + 2u_n, n \geq 0.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de F.
3. Tenant compte du fait qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est entièrement déterminée par la donnée de u_0 et u_1, montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ forment une base de F.
4. Déterminer les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ de F telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.