Feuille 2 : Équations différentielles linéaires

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'(x) = x^2 y(x)$.
2. $y'(x) - x^2 y(x) = x^2$.
3. $y'(x) - x^2 y(x) = x^2 + (1-x^2)e^x$.
4. $y'(x) - x^2 y(x) = 2e^{\frac{x^3}{3}}$, puis déterminer la solution qui vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = y(t) + t$ avec la condition initiale $y'(0) = 0$.

Exercice 3. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $xy' - (x+2)y = x^4$ avec $y(1) = 1$.

Exercice 4. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy'(x) + y(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{avec} \quad y(1) = 0.$$

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' + y' + y = (7x^2 + 3x + 4)e^{2x}$.
2. $y'' + 2y' + 9y = (8x^2 - 8x + 10)e^{-x}$.
3. $2y'' + y' - 3y = \cos x$.
4. $y'' - 2y' + y = 2\sin x$.
5. $y'' - 4y' + 4y = xe^x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - y = e^x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
2. $2y'' + y' - 3y = (x-1)e^x$.
3. $y'' - 4y' + 4y = (6x+4)e^{2x}$.
4. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x + 2x^2$.
5. $y'' - y = 2\ \mathrm{ch}(x)$.

Exercice 7.

1. Trouver la solution générale y de l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = kt \qquad (\star)$$

   où k est un paramètre réel.
2. Sachant que parmi les solutions de $(\star)$ trouvées dans la question 1) il en existe une telle que $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 1$, déterminer la valeur de k.

Exercice 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équations différentielle $y'' + 4y' + 3y = 3t^2 + 2t$.

Exercice 9.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$x^2y' - y = 1.$$
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$xy' + y - 1 = 0.$$
3. Pour quelles valeurs de $\alpha, \beta > 0$ l'équation suivante admet-elle une solution continue sur $\mathbb{R}$?
$$x^\beta y' + y = x^\alpha$$
4. Résoudre sur $]0, \frac{3\pi}{2}[$ l'équation différentielle
$$\sin(x)y' - y\cos(x) = 1.$$

Exercice 10. Trouver une équation différentielle dont l'ensemble des solutions est
$$\{x \mapsto \frac{C+x}{1+x^2},\ C \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 11. Soit P la population d'un pays. On considère que l'accroissement de la population est proportionel à la population. Si on suppose que la population double tous les 50 ans, en combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 12. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante
$$x^2 + y^2 - 2xyy' = 0.$$