Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de printemps 2019-2020**

L1 Math-Info | UE : Fondamentaux des mathématiques II

Feuille d'exercices n° 1-bis

Matrices

Dans toute la feuille, $\mathbb{K}$ est un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1. Que peut on dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $Tr(AA^T) = 0$? Est-ce toujours vrai si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $Tr(AX) = Tr(BX)$ pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A = B$.
Indication : On pourra considérer ce que donne l'égalité $Tr(AX) = Tr(BX)$ pour les matrices élémentaires $X = E_{ij}$.

Exercice 3. *(Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)*
Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifient $AM = MA$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Indication : On pourra considérer ce que donne l'égalité $AM = MA$ pour les matrices élémentaires $M = E_{ij}$.

Exercice 4. *(Polynômes de matrices)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ qui s'écrit $P(X) = \sum_{i=1}^{N} a_i X^i$, on définit $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice :

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_N A^N.$$

Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

1. Si $P(X) = 1$ alors $P(A) = I_n$.
2. $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$, $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$.
3. $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
4. $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$, $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 5.

1. Pour n entier ≥ 2 déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de l'exercice 4 et de la question précédente A^n pour $n \geq 2$.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.
Indication : penser aux sommes de suites géométriques.

Exercice 7. Démontrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible.

(ii) Pour tout vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\big(AX = 0 \Rightarrow X = 0\big)$.

Indication : Pour démontrer (ii) $\Rightarrow$ (i), on pourra d'abord considérer le cas où A est une matrice échelonnée réduite non inversible et trouver un vecteur $X \neq 0$ tel que $AX = 0$.

Exercice 9. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall i \in \{1, 2, .., n\} \qquad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Montrer que A est inversible.

Indication :On pourra utiliser l'exercice 8 .