Devoir Maison de Mathématiques 2

Exercice 1. On note $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction partie entière inférieure, c'est à dire que pour $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. Soit a un nombre réel positif. Calculer

$$\int_0^a E(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2.

a) Pour $x \in [0,1]$ on pose $g(x) = -\ln(\cos(x))$. Montrer que g est définie et dérivable sur $[0,1]$ et que pour tout $x \in [0,1]$ on a $g'(x) = \tan(x)$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \tan(t)\mathrm{d}t$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\tan\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$.

Exercice 3. Soit E un espace véctoriel de dimension n. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} g: & E\times E & \to & E \\ & (u,v) & \to & u-v \end{array}$$

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. Montrer que $\mathcal{B}' = \big((v_1,0), \ldots, (v_n,0), (0,v_1), \ldots, (0,v_n)\big)$ est une base de $E \times E$.
3. Calculer l'image par g des elements de $\mathcal{B}'$. En déduire $\mathrm{Im}(g)$.
4. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = n$.
5. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(g)$.