
Devoir Maison de Maths n° 1

A rendre sur Tomuss avant le lundi 23 mars 2020 - 12H

Exercice 1. On considère

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}, \quad \text{et} \quad W = \text{Vect}\big((1, 1, 2), (1, -1, 0)\big) \subset \mathbb{R}^3.$$

1. *Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base pour V. En déduire sa dimension.*

Soit $x, y \in V$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ les coordonnées de x et y dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, c'est montrer que $\lambda x + y \in V$, et que $0 \in V$. Le vecteur $(0, 0, 0)$ satisfait l'équation qui définit V, et donc appartient à V. Le vecteur $\lambda x + y$ a pour coordonnées $(\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2, \lambda x_3 + y_3)$. Donc la question qui se pose est de savoir si

$$\lambda x_1 + y_1 = 2(\lambda x_2 + y_2).$$

L'égalité ci-dessus est vraie avec $x_1 = 2x_2$ comme $x \in V$ et $y_1 = 2y_2$ comme $y \in V$.

On cherche maintenant une base de V. Étant donné $x \in V$, on note $x = (x_1, x_2, x_3)$ et en utilisant l'équation de V :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1/2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On vient de voir que la famille de deux vecteurs $\{(1, 1/2, 0), (0, 0, 1)\}$ est génératrice de V. C'est par ailleurs une famille libre (il suffit de regarder ces vecteurs pour voir qu'ils ne sont pas colinéaires. C'est donc une base de V, et $\dim V = 2$.

---

2. *Trouver $V \cap W$.*

Soit $x \in V \cap W$. Comme $x \in V$, on a $x = (x_1, x_1/2, x_3)$, pour un certain $x_1 \in \mathbb{R}$ et un certain $x_3 \in \mathbb{R}$, comme on l'a vu à la question précédente. Par ailleurs, $x \in W$, et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1/2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité ci-dessus entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est un système de trois équations à 4 inconnues (qui sont x_1, x_3, λ et μ). Un tel système, avec plus d'inconnues que d'équations, admet généralement une infinité de solutions. C'est bien ce que nous attendons ici: nous sommes en train de calculer l'intersection de deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$. Le résultat sera une droite, qui contient bien sûr une infinité de vecteurs. On a donc

$$\begin{cases} x_1 = \lambda + \mu, \\ x_1/2 = \lambda - \mu, \\ x_3 = 2\lambda \end{cases}$$

On en déduit le système équivalent:

$$\begin{cases} 3x_1/2 = 2\lambda, \\ x_1/2 = 2\mu, \\ x_3 = 2\lambda \end{cases}$$

ce qui correspond à

$$\begin{cases} 3x_1/2 = 2\lambda, \\ x_3 = 2\lambda \\ \mu = \lambda/3 \end{cases}$$

On a donc une infinité de solutions, paramétrée par $\lambda \in \mathbb{R}$. Du système précédent on déduit $3x_1/2 = x_3$, c'est-à-dire que

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1/2 \\ 3x_1/2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

On en conclut que $V \cap W$ est la droite engendrée par le vecteur $(1, 1/2, 3/2)$.

---

3. *Trouver une base pour $V + W$.*

On peut commencer par chercher la dimension de $V + W$, en utilisant la formule de la dimension:

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Comme $V + W \subset \mathbb{R}^3$, on a donc $V + W = \mathbb{R}^3$. Toute base de $\mathbb{R}^3$, par exemple $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est donc une base de $V + W$.

4. *Montrer que* $(0, 1, 0) \notin W$.

Il s'agit de prouver que le système suivant de trois équations à deux inconnues $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ n'a pas de solutions:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 0 = \lambda + \mu, \\ 1 = \lambda - \mu, \\ 0 = 2\lambda. \end{cases}$$

Un système équivalent est

$$\begin{cases} 0 = \mu, \\ 1 = \mu, \\ 1 = \lambda, \end{cases}$$

et ce système n'a en effet pas de solution.

5. *Est-ce qu'on peut avoir un sous-espace vectoriel Z de $\mathbb{R}^3$ tel que $V \oplus Z = W \oplus Z = \mathbb{R}^3$. Si oui, donner un tel sous-espace vectoriel.*

Deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$ admettent un supplémentaire commun. On s'en convainc assez facilement en faisant un dessin. Nous allons le vérifier ici sur cet exemple.

Soit $a = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$. Ce vecteur n'appartient pas à W d'après la question précédente. On a aussi $a \notin V$, car les coordonnées de a ne satisfont pas l'équation qui définit V.

La droite $Z = \mathrm{vect}\,(a)$ est un supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^3$. En effet, $V \cap Z = \{0\}$ car $a \notin V$, et $\dim(V + Z) = 3$, donc $V + Z = V \oplus Z = \mathbb{R}^3$.

De même, de $a \notin W$, on déduit par les mêmes arguments le fait que $W \oplus Z = \mathbb{R}^3$.

<u>Exercice 2.</u> On s'intéresse à la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante:

$$x^2 y' + y = x^2 + x. \tag{E}$$

1. *Résoudre (E):*

   (a) *sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.*

L'équation homogène sur I_1 et sur I_2 est

$$y' + \frac{1}{x^2} y = 0,$$

qui a pour solutions la famille de fonctions

$$x \to c e^{1/x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

La méthode de variation de la constante pour trouver une solution de l'équation inhomogène donne lieu ici à une intégration (recherche de primitive) difficile. On peut à la place observer que la fonction

$$x \to x$$

est une solution de l'équation différentielle sur I_1 et sur I_2. L'ensemble des solutions sur I_1 est donc la famille de fonctions

$$\begin{cases} \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R} \\ \quad x \to c e^{1/x} + x, \end{cases}$$

et l'ensemble des solutions sur I_2 est la famille de fonctions

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ \quad x \to ce^{1/x} + x, \end{cases}$$

(b) *sur* $\mathbb{R}$.

Une solution sur $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ qui satisfait l'équation différentielle en tout point de $\mathbb{R}$. Par la question précédente, si y est solution sur $\mathbb{R}$, alors il existe $c_- \in \mathbb{R}$ et $c_+ \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} x + c_- e^{1/x}, & x < 0, \\ x + c_+ e^{1/x}, & x > 0. \end{cases} \tag{1}$$

On observe que $x \to e^{1/x}$ tend vers $+\infty$ quand $x \to 0$ avec $x > 0$. Donc nécessairement $c_+ = 0$. Alors y tend vers 0 quand $x \to 0$ avec $x > 0$. Comme $x \to e^{1/x}$ tend vers 0 quand $x \to 0$ avec $x < 0$, la fonction y est donc continue en $x = 0$, et $y(0) = 0$.

Envisageons la dérivabilité de y en $x = 0$. Il s'agit de voir si la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0}$$

existe et est finie. On observe que

$$\text{pour } x > 0 : \qquad \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} = 1,$$

si bien que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 1. \tag{2}$$

Par ailleurs,

$$\text{pour } x < 0 : \qquad \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \frac{x + c_- e^{1/x}}{x - 0} = 1 + c_- \frac{e^{1/x}}{x}.$$

Quand s'approche de zéro avec $x < 0$, l'exponentielle $e^{1/x}$ tend vers 0, et $1/x$ tend vers $-\infty$. Par croissances comparées, la limite est 0. On a donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 1. \tag{3}$$

De (2) et (3) on déduit que la limite du taux d'accroissement de y existe en 0 et vaut 1. Donc pour tout $c_- \in \mathbb{R}$, la solution y définie par (4) avec $c_+ = 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Finalement, y est dérivable sur $\mathbb{R}$, satisfait l'équation en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et aussi en $x = 0$. Donc y est une solution sur $\mathbb{R}$. On a donc trouvé une famille à un paramètre de solutions sur $\mathbb{R}$, qui sont les fonctions

$$y(x) = \begin{cases} x + ce^{1/x}, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

---

2. *Donner toutes les solutions sur* $\mathbb{R}$*, s'il en existe, de* (E) *vérifiant* $y(0) = -1$.

Une solution y sur $\mathbb{R}$ est de la forme (4). Nécessairement $y(0) = 0$. Donc aucune solution ne vaut -1 en 0.

---

3. *Existe-t-il une solution sur* I_1 *de* (E) *vérifiant la condition initiale* $y(-1) = 0$*? Si oui, en expliciter une.*

Une solution sur I_1 est de la forme

$$y(x) = x + ce^{1/x}.$$

La condition "initiale" $y(-1) = 0$ est une équation portant sur c :

$$0 = -1 + ce^{-1},$$

qui a pour unique solution $c = e$. L'unique solution cherchée sur I_1 est donc la fonction

$$x \to x + e^{1+1/x}.$$

Exercice 3. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 1,\ b_0 = 2$ et les relations de récurrences:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - b_n, \\ b_{n+1} = a_n + b_n. \end{cases}$$

Notre but est d'exprimer a_n et b_n en fonction de n.

1. *On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Les relations de récurrence de l'énoncé se traduisent en

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_n - b_n \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix},$$

si bien que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De $X_{n+1} = AX_n$, on déduit pour $n \geq 1$ la relation $X_n = AX_{n-1}$, et pour $n \geq 2$ on a donc $X_n = A^2 X_{n-2}$, et par une récurrence immédiate on obtient $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

2. *Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer N^k pour tout $k \geq 2$.*

On calcule

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

On en déduit par une récurrence immédiate que $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$.

---

3. *Trouver A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On cherche à utiliser la question précédente: il faut donc trouver un lien entre A et N. Ce lien est le suivant:

$$A = 2I_2 + N.$$

Comme I et N commutent, on a (binôme de Newton):

$$A^n = (2I_2 + N)^n = \sum_{0 \le k \le n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (2I_2)^k N^{n-k}.$$

Presque tous les termes dans la somme ci-dessus sont nuls: tous ceux qui correspondent à $n - k \ge 2$, c'est-à-dire $k \le n - 2$. On ne garde donc que $k = n - 1$ et $k = n$:

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} (2I_2)^{n-1} N + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} (2I_2)^n N^0 \\ &= n(2I_2)^{n-1} N + (2I_2)^n \\ &= n2^{n-1} N + 2^n I_2. \end{aligned}$$

Et donc

$$A^n = \begin{pmatrix} n2^{n-1} + 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & -n2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix}.$$

---

4. *En déduire a_n et b_n en fonction de n.*

On utilise les questions 1 et 3:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n2^{n-1} + 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & -n2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{cases} a_n = n2^{n-1}(a_0 - b_0) + 2^n a_0, \\ b_n = n2^{n-1}(a_0 - b_0) + 2^n b_0. \end{cases}$$

Avec les données initiales $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ on obtient

$$\begin{cases} a_n = -n2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1}(2 - n), \\ b_n = -n2^{n-1} + 2^{n+1} = 2^{n-1}(4 - n). \end{cases}$$