Correction de la feuille 6 : Fonctions circulaires réciproques

Exercice 1. 1. Montrer que $0 < \arccos\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}$

2. Résoudre $\arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}$

Correction de l'exercice 1. (1) La fonction $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ est strictement décroissante. Donc sa réciproque arccos est strictement décroissante. Comme $\sqrt{2} \simeq 1.41$, on a $\sqrt{2} \leq 3/2$, et donc $\sqrt{2}/2 < 3/4$, si bien que

$$\arccos(3/4) < \arccos(\sqrt{2}/2),$$

et comme $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et que $\pi/4 \in [0,\pi]$, on a $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$. Donc

$$\arccos(3/4) < \pi/4.$$

Noter que $\cos(\pi/4 + 2\pi) = \sqrt{2}/2$ mais comme $\pi/4 + 2\pi \notin [0,\pi]$, on n'a pas $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4 + 2\pi$. Les exercices 2 et 3 reviennent sur ce point.
Par ailleurs, $3/4 < 1$, donc $\arccos(1) = 0 < \arccos(3/4)$.

(2) On applique cos aux deux membres de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ pour trouver

$$\cos(\arccos(x)) = \cos(2\arccos(3/4).$$

On utilise ensuite

$$\cos(\arccos(x)) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

L'égalité (1) vient de la *définition* de arccos en tant que réciproque de $\cos_{|[0,\pi]}$, la restriction de cos à $[0,\pi]$. En effet, arccos est définie comme une fonction de $[-1,1]$ à valeurs dans $[0,\pi]$, si bien que

$$\cos\circ\arccos = \left(\cos_{|[0,\pi]}\right)\circ\arccos = \mathrm{Id}_{|[-1,1]}, \tag{2}$$

où $\mathrm{Id}_{|[-1,1]}$ est la fonction identité: $x \to x$, en restriction à $[-1,1]$. Donc on obtient

$$x = \cos(2\arccos(3/4)),$$

qui est une réponse tout à fait acceptable. On peut la simplifier, en utilisant une formule de trigonométrie:

$$\cos(2z) = 2\cos(z)^2 - 1, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Cela donne

$$x = 2\cos(\arccos(3/4))^2 - 1 = 2\cdot(3/4)^2 - 1.$$

Exercice 2. Calculer $\arcsin(\sin a)$, $\arccos(\cos a)$, $\arctan(\tan a)$, $\arccos(\sin a)$ pour $a \in \left\{\frac{61\pi}{5}, \frac{76\pi}{5}, \frac{83\pi}{5}\right\}$.

Correction de l'exercice 2. Le point crucial est le suivant:

$$\arcsin \circ \sin \neq \mathrm{Id}, \tag{3}$$

où Id est la fonction $x \to x$ définie sur $\mathbb{R}$. En effet, arcsin n'est *pas* la réciproque de sin, qui n'est pas injective, mais la réciproque de la restriction de sin à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ (qui est injective).
Par définition de arcsin :

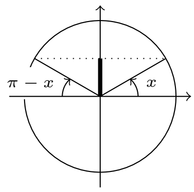
$$\forall\, x \in [-\pi/2, \pi/2] : \qquad \arcsin \circ \sin(x) = \arcsin \circ \sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}(x) = x. \tag{4}$$

Soit maintenant $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Alors $x - \pi \in [-\pi/2, \pi/2]$, donc d'après (4):

$$\arcsin(\sin(x - \pi)) = x - \pi.$$

On fait maintenant le lien entre $\sin(x)$ et $\sin(x - \pi)$: d'abord on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x) = \sin(\pi - x) \tag{5}$$



Et donc par imparité de sin,

$$\sin(x - \pi) = -\sin(x).$$

La fonction arcsin est aussi impaire, si bien que

$$\forall\, x \in [\pi/2, 3\pi/2], \quad \arcsin(\sin(x)) = -\arcsin(\sin(x - \pi)) = \pi - x. \tag{6}$$

Avec (4) et (6) on connait maintenant la fonction arcsin(sin) sur un intervalle de longueur 2π, et donc on la connait partout, car sin est 2π-périodique (noter que arcsin n'est *pas* périodique: elle est définie seulement sur $[-1, 1]$).
Précisément: soit $x \in \mathbb{R}$. Pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$x \in [-\pi/2 + k\pi, -\pi/2 + (k+1)\pi[. \tag{7}$$

L'entier k est unique et est bien sûr une fonction de x. On peut préciser la valeur de k :

$$-\pi/2 + k\pi \le x < -\pi/2 + (k+1)\pi$$

est équivalent à

$$k \le \frac{x + \pi/2}{\pi} < k + 1,$$

et donc

$$k = [\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}], \tag{8}$$

en notant $[y]$ la partie entière du nombre réel y. Soit donc $x \in \mathbb{R}$ et k défini par (8):

- Si k est pair, alors $\sin(x) = \sin(x - k\pi)$, et comme $x - k\pi$ appartient à $[-\pi/2, \pi/2[$, on a, par (4),

$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(x - k\pi) = x - k\pi.$$

- Si k est impair, alors $k - 1$ est pair est donc $\sin(x - k\pi) = \sin(x - (k-1)\pi - \pi) = \sin(x - \pi) = -\sin(x)$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = -\arcsin(\sin(x - k\pi)) = k\pi - x.$$

Finalement,

$$\arcsin(\sin(x)) = \begin{cases} x - k\pi, & \text{si } k \text{ défini par (8) est pair,} \\ k\pi - x, & \text{si } k \text{ défini par (8) est impair,} \end{cases}$$

ce qu'on peut résumer en

$$\arcsin(\sin(x)) = (-1)^k (x - k\pi), \qquad k \text{ défini par (8)}, \tag{9}$$

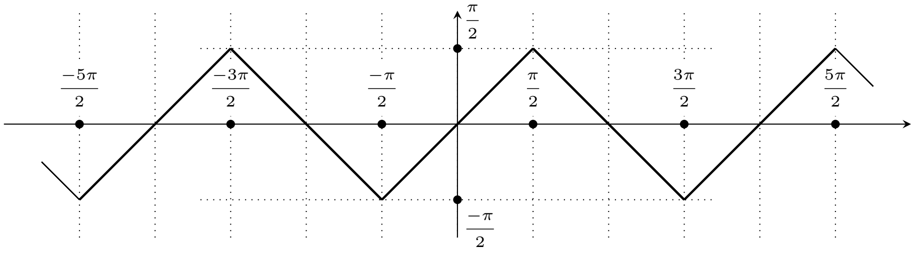


Figure 1: Le graphe de la fonction $x \to \arcsin(\sin(x))$.

et avec (8) on a la formule (pas particulièrement utile sous cette forme)

$$\arcsin(\sin(x)) = (-1)^{[x/\pi+1/2]}(x - \pi[x/\pi + \frac{1}{2}]). \tag{10}$$

Avec la formule (9), la question posée est maintenant très simple. On calcule: $61 = 12 \cdot 5 + 1$, si bien que $61/5 = 12 + 1/5$, et donc $61\pi/5 = 12\pi + \pi/5$. On applique la formule (9) avec $x = 61\pi/5$, et $k = 12$. Cela donne

$$\arcsin(\sin(61\pi/5)) = \pi/5.$$

Si maintenant $x = 76\pi/5$, on observe que $76/5 = 75/5 + 1/5 = 15 + 1/5$, et on applique la formule (9) avec $x = 76\pi/5$ et $k = 15$. Comme k est impair cela donne

$$\arcsin(\sin(76\pi/5)) = -\pi/5.$$

Le calcul pour $83\pi/5$ est bien sûr similaire.
Pour arccos, un raisonnement similaire aboutit à une formule analogue à (9), qui permet de calculer facilement les valeurs de arccos(cos) aux points donnés dans l'énoncé. Mais on peut calculer les valeurs demandées sans trouver une expression générale pour arccos(cos) :

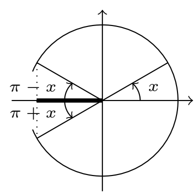
$$\arccos(\cos(61\pi/5)) = \arccos(12\pi + \pi/5)) = \arccos(\cos(\pi/5)) = \pi/5,$$

la dernière égalité puisque arccos est la réciproque de la restriction de cos à $[0, \pi]$, et $\pi/5 \in [0, \pi]$. Ensuite

$$\begin{aligned} \arccos(\cos(76/\pi/5)) = \arccos(\cos(14\pi + \pi + \pi/5)) &= \arccos(\cos(\pi + \pi/5)) \\ &= \arccos(\cos(\pi - \pi/5)) \\ &= \pi - \pi/5. \end{aligned} \tag{11}$$

L'avant-dernière égalité dans (11) vient de

$$\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x), \qquad x \in \mathbb{R}$$



La dernière égalité dans (11) vient du fait que $\pi - \pi/5 \in [0, \pi]$.
On a $83\pi/5 = 16\pi + 3\pi/5$, et donc

$$\arccos(\cos(83\pi/5)) = \arccos(\cos(3\pi/5)) = 3\pi/5.$$

Le raisonnement pour arctan(tan) est similaire, et en fait plus simple car la restriction de tan à une période est bijective, contrairement à cos et sin. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, si on considère à nouveau k défini par (7), ou ce qui revient au même par (8), on a

$$\arctan(\tan(x)) = \arctan(\tan(x - k\pi)) = x - k\pi,$$

la dernière égalité car $x - k\pi$ appartient à $]-\pi/2, \pi/2[$, par définition de k. Donc on a la formule

$$\arctan(\tan(x)) = x - \pi\Big[\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\Big], \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}. \tag{12}$$

En particulier,

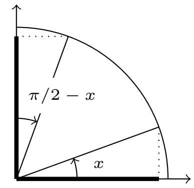
$$\arctan(\tan(61\pi/5)) = \arctan(\tan(12\pi + \pi/5)) = \pi/5,$$

$$\arctan(\tan(76\pi/5)) = \arctan(\tan(15\pi + \pi/5)) = \pi/5,$$

$$\arctan(\tan(83\pi/5)) = \arctan(\tan(17\pi - 2\pi/5)) = -2\pi/5.$$

On cherche maintenant la valeur de $x = \arccos(\sin(61\pi/5)) = \arccos(\sin(\pi/5))$. On a donc $x \in [0, \pi]$, et $\cos(x) = \sin(\pi/5)$. On peut utiliser la formule de trigonométrie

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$



qui donne

$$\sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi/5), \qquad x \in [0, \pi]. \tag{13}$$

Quand x parcourt $[0, \pi]$, $y = \pi/2 - x$ parcourt $[-\pi/2, \pi/2]$. La fonction sin est injective sur $[-\pi/2, \pi/2]$, et donc de (13), on déduit $\pi/2 - x = \pi/5$, et donc $x = \pi/2 - \pi/5$.

On cherche maintenant à calculer $x = \arccos(\sin(76\pi/5)) = \arccos(\sin(\pi + \pi/5))$, c'est-à-dire qu'on cherche à résoudre l'équation

$$\cos(x) = \sin(\pi + \pi/5), \quad x \in [0, \pi].$$

En utilisant la formule ci-dessus, cela revient à

$$\sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi + \pi/5), \quad x \in [0, \pi].$$

Le problème ici est que $\pi + \pi/5$ n'appartient pas à $[0, \pi]$. On peut s'y ramener en utilisant la formule (5):

$$\sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi + \pi/5) = \sin(-\pi/5), \quad x \in [0, \pi].$$

On a vu plus haut que $\pi/2 - x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Comme on a $-\pi/5 \in [-\pi/2, \pi/2]$ et que sin est injective sur cet intervalle, cela donne $\pi/2 - x = -\pi/5$, et donc $x = \pi/2 + \pi/5$.

Exercice 3. Que vaut $\arccos(\cos x)$ si $x \in [6\pi, 7\pi]$ puis si $x \in [25\pi, 26\pi]$?

Correction de l'exercice 3: on peut procéder comme on l'a fait dans la correction de l'exercice 2 pour arcsin(sin).

Exercice 4. Votre calculatrice affirme que l'argument de $z = -3 + 4i$ est $-\arctan\dfrac{4}{3} + \pi$ ou $\arctan\dfrac{3}{4} + \dfrac{\pi}{2}$. Ces deux valeurs sont-elles cohérentes?

Correction de l'exercice 4. À partir de

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

on déduit

$$\left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 0, \qquad x \neq 0. \tag{14}$$

En effet, en explicitant les dérivées on trouve

$$\frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Donc la fonction dans le membre de gauche de (14) est constante **sur $\mathbb{R}_-$, et par ailleurs aussi sur $\mathbb{R}_+$. La version précédente de cette correction affirmait que de** (14)**, on pouvait déduire le fait que la fonction $x \to \arctan(x) + \arctan(1/x)$ est constante, ce qui n'est pas vrai car l'égalité** (14) **est valable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, qui n'est pas un intervalle.** On trouve la constante dans $\mathbb{R}_+$ en évaluant par exemple en $x = 1$: alors $\arctan(1) = \arctan(1/1) = \pi/4$ car $\tan(\pi/4) = 1$. On a donc

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2, \qquad x > 0. \tag{15}$$

On trouve la constante dans $\mathbb{R}_-$ par exemple en prenant la limite $x \to -\infty$. On obtient

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = -\pi/2, \qquad x < 0. \tag{16}$$

En revenant à l'énoncé, on peut maintenant répondre: oui, ces deux valeurs sont égales, du fait de (15).

Exercice 5. L'application $\cos : [2\pi, 3\pi] \to [-1, 1]$ est-elle bijective ? Si oui, donner une expression de sa fonction réciproque.

Correction de l'exercice 5. Par 2π-périodicité, cos est bijective sur $[2\pi, 3\pi]$ vers $[-1, 1]$ comme elle l'est sur $[0, \pi]$. Elle a donc une fonction réciproque, qu'on va noter ici $\arccos_{2\pi,3\pi}$, qui est une fonction bijective $[-1, 1] \to [2\pi, 3\pi]$. Pour tout $x \in [2\pi, 3\pi]$, $\cos(x - 2\pi) = \cos(x)$ et $x - 2\pi \in [0, \pi]$, de sorte que

$$\arccos(\cos(x - 2\pi)) = x - 2\pi, \qquad x \in [2\pi, 3\pi].$$

Par ailleurs, par définition de $\arccos_{2\pi,3\pi}$,

$$\arccos_{2\pi,3\pi}(\cos(x)) = x, \qquad x \in [2\pi, 3\pi].$$

Donc par comparaison de ces deux égalités on a

$$\arccos_{2\pi,3\pi}(\cos(x)) = \arccos(\cos(x)) + 2\pi, \quad x \in [2\pi, 3\pi].$$

Comme cos est surjective $[2\pi, 3\pi] \to [-1, 1]$, cela implique

$$\arccos_{2\pi,3\pi}(y) = \arccos(y) + 2\pi, \quad y \in [-1, 1],$$

ce qui est une description de la fonction réciproque de cos en restriction à $[2\pi, 3\pi]$.

Exercice 6. Représenter graphiquement sans l'aide de la calculatrice la fonction $x \mapsto \arcsin(\sin x)$.

Pour la correction de l'exercice 6: voir la correction de l'exercice 2.

Exercice 7. Simplifier les expressions $\tan(\arcsin x)$, $\cos(\arctan x)$ après avoir donné leur ensemble de définition.

Correction de l'exercice 7. Le domaine de définition de tan est $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. La fonction arcsin est définie et injective sur $[-1,1]$, à valeur dans $[-\pi/2, \pi/2]$, avec $\arcsin(-1) = -\pi/2$ et $\arcsin(1) = \pi/2$. Donc $\tan(\arcsin)$ est définie sur $]-1,1[$.
Par définition de tan :

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{x}{\cos(\arcsin(x))}.$$

On cherche donc à simplifier $\cos(\arcsin(x))$. On calcule sa dérivée:

$$\big(\cos(\arcsin(x))\big)' = -\sin(\arcsin(x)) \cdot \big(\arcsin\big)'(x) = -\frac{\sin(\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Plus haut on a utilisé la formule pour la dérivée de arcsin, qui se trouve page 5 des notes manuscrites de cours (chapitre 6). On a donc

$$\cos(\arcsin(x)) - \cos(\arcsin(0)) = \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt' = \sqrt{1-x^2} - 1.$$

Comme $\sin(0) = 0$, et $\cos(0) = 1$, on a $\cos(\arcsin(0)) = 1$, et finalement

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2},$$

ce qui donne

$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in]-1,1[.$$

On étudie maintenant $\cos(\arctan)$. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ (car tan est surjective sur $\mathbb{R}$). Donc $\cos(\arctan)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Si on dérive comme ci-dessus

$$\big(\cos(\arctan)\big)'(x) = -\sin(\arctan(x)) \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

il semble a priori qu'on n'a pas vraiment fait de progrès: il faut maintenant considérer $\sin(\arctan)$, une question semblable à la question de départ. Mais on peut faire le lien entre $\sin(\arctan)$ et $\cos(\arctan)$ via $\tan(\arctan)$, qui est la fonction identité:

$$\tan(\arctan(x)) = \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))} = x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$\sin(\arctan(x)) = x\cos(\arctan(x)),$$

et la formule ci-dessus devient

$$\big(\cos(\arctan)\big)'(x) = -\sin(\arctan(x)) \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{-x}{1+x^2}\cos(\arctan(x)).$$

Donc cos(arctan), la fonction qu'on cherche à décrire, est solution de l'équation différentielle

$$y' = -\frac{x}{1+x^2}y,$$

dont l'ensemble des solutions est

$$\Big\{x \to k\exp\Big(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big), \quad k \in \mathbb{R}\Big\}.$$

On peut écrire $\exp(\ln(1+x^2)/2) = \sqrt{1+x^2}$, et donc on cherche $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos(\arctan(x)) = k\sqrt{1+x^2}.$$

On peut par exemple évaluer en $x = 0$: $\cos(\arctan(0)) = \cos(0) = 1 = k$. On a trouvé

$$\cos(\arctan(x)) = \sqrt{1+x^2}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

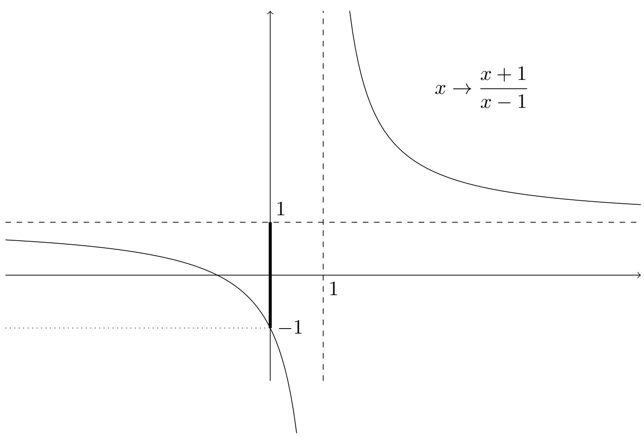
Exercice 8. On pose $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^-$.
2. Déterminer le ou les points de la courbe d'ordonnée nulle et préciser la tangente en ce ou ces points.
3. Etudier la fonction.

Correction de l'exercice 8. 1. La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$. Donc on se demande quels sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $(x+1)/(x-1) \in [-1,1]$. On calcule:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1},$$

et on voit que c'est pour $x \in \mathbb{R}_-$ que l'hyperbole $x \to (x+1)/(x-1)$ prend des valeurs dans $[-1,1]$.



2. La fonction $x \to 1 + 2/(x-1)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Elle tend vers 1 en $+\infty$ et vaut-1 en 0. Donc il existe un unique x_0 pour lequel cette fonction s'annule, et on peut le calculer explicitement: $x_0 = -1$. Soit maintenant x tel que $f(x) = 0$. Comme arctan est injective, et que $\arctan(0) = 0$. cela implique $(x+1)/(x-1) = 0$ et donc $x = -1$. On calcule:

$$f'(x) = \left(1 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2\right)^{-1/2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}. \tag{17}$$

Pour le calcul de f' ci-dessus, on a utilisé la formule de dérivation des fonctions composées et la formule pour la dérivée de arcsin (voir page 5 du chapitre 6 des notes de cours). En particulier,

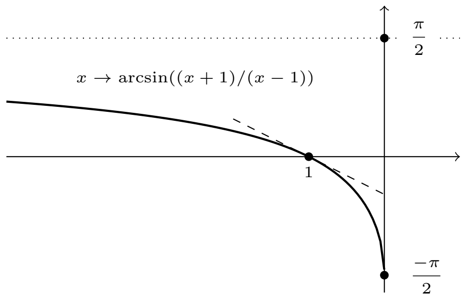
$$f'(-1) = -1/2,$$

donc la tangente au point -1 a pour équation

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1), \quad \text{c'est-à-dire} \quad y - 0 = -(1/2)(x+1).$$

3. D'après (17), on voit que $f' < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Par ailleurs,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to 1} \arcsin(y) = \frac{\pi}{2}, \qquad f(0) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$



Exercice 9. Simplifier les expressions $\arccos x + \arcsin x$ et $\arccos x + \arccos(-x)$ après avoir donné leur ensemble de définition. On pourra dériver.

Correction de l'exercice 9. La fonction $x \to \arccos(x) + \arcsin(x)$ est définie sur l'intersection des domaines de définition de arccos et arcsin, donc $[-1, 1]$. On dérive

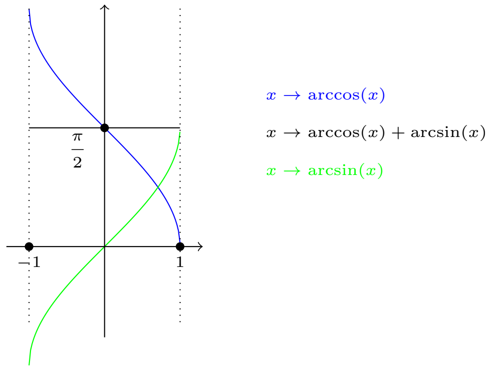
$$\big(\arccos + \arcsin\big)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

en utilisant les formules pages 5 et 7 des notes de cours sur le chapitre 6. Comme $[-1, 1]$ est un intervalle, la fonction est donc constante sur $[-1, 1]$. On trouve la valeur de la constante par exemple en évaluant en $x = 0$:

$$\arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{pour tout } x \in [-1, 1].$$



La fonction arccos est définie sur $[-1,1]$, comme la fonction $x \to \arccos(-x)$. Donc $g: \ x \to \arccos(x) + \arccos(-x)$ est définie sur $[-1,1]$. On dérive:

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + (-1)\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = 0.$$

Donc g est constante sur l'intervalle $[-1,1]$. On évalue par exemple en $x=0$ pour trouver la constante:

$$g(0) = 2\arccos(0) = \pi.$$

si bien que

$$\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi, \qquad x \in [-1,1].$$

Exercice 10. Soit x, y des réels tels que $xy \neq 1$. Simplifier $\arctan\dfrac{x+y}{1-xy} - \arctan x - \arctan y$. On pourra dériver.

Correction de l'exercice 10. On pose

$$F(x,y) = \arctan\frac{x+y}{1-xy} - \arctan x - \arctan y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad xy \neq 1.$$

On calcule la dérivée partielle de F par rapport à x : c'est la dérivée (au sens usuel) de la fonction $x \to F(x,y)$, à y fixé. On note $\partial_x F(x,y)$ cette dérivée partielle:

$$\partial_x F(x,y) = \left(1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2\right)^{-1} \cdot \partial_x\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) - \frac{1}{1+x^2},$$

où on a utilisé la formule pour la dérivation de arctan et la formule de dérivation des fonctions composées. On calcule:

$$\partial_x\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2} \quad = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$$

Par ailleurs,

$$1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2 = \frac{1+x^2y^2+x^2+y^2}{(1-xy)^2},$$

si bien que

$$\begin{aligned}\partial_x F(x,y) &= \frac{(1-xy)^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2}\cdot\frac{1+y^2}{(1-xy)^2} - \frac{1}{1+x^2}\\ &= \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \qquad \text{pour tous } x,y \text{ tels que } xy \neq 1.\end{aligned}$$

On observe que $F(x,y) = F(y,x)$ pour $x \neq y$, et donc par symétrie

$$\partial_y F(x,y) = \partial_x F(y,x) = 0, \quad xy \neq 1.$$

Si $y = 0$, on voit directement à partir de la définition de F que $F(x,0) = 0$. Pour $y \neq 0$, si on considère maintenant que y est fixé et que $G : x \to F(x,y)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1/y\}$, on a donc $G'(x) = 0$ pour tout x, si bien que G est constante sur $]-\infty, 1/y[$ et aussi sur $]1/y, +\infty[$.

On trouve la constante sur $]-\infty, 1/y[$ en faisant tendre x vers $-\infty$. On observe que

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \arctan(-1/y) + \frac{\pi}{2} - \arctan(y).$$

D'après (15), on a donc

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \begin{cases} 0, & y > 0, \\ \pi, & y < 0. \end{cases},$$

si bien que

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 1/y \quad \text{et} \quad 0 < 1/y, \\ \pi, & x < 1/y \quad \text{et} \quad 1/y < 0. \end{cases}$$

On trouve la constante sur $]1/y, +\infty[$ en faisant tendre x vers $+\infty$. On observe que

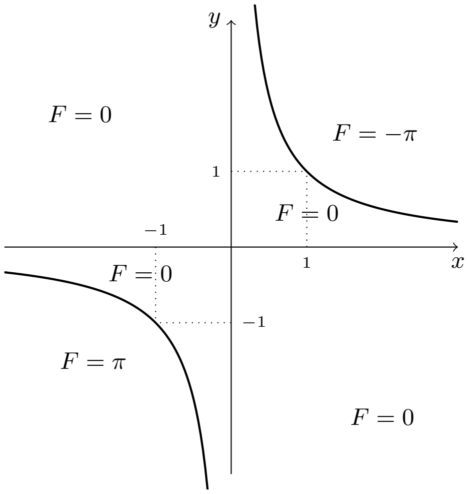
$$\lim_{x\to+\infty} F(x,y) = \arctan(-1/y) - \frac{\pi}{2} - \arctan(y).$$

D'après (15), on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} F(x,y) = \begin{cases} -\pi, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases},$$

si bien que

$$F(x,y) = \begin{cases} -\pi, & 0 < 1/y \quad \text{et} \quad 1/y < x, \\ 0, & 1/y < 0 \quad \text{et} \quad 1/y < x. \end{cases}$$



On peut remarquer que le résultat (voir le graphe ci-dessus) est *symétrique en x et y*, comme la fonction F.

Exercice 11. On cherche à résoudre l'équation (E): $\arctan 2x + \arctan x = \dfrac{\pi}{4}$.

1. Démontrer que $f : x \mapsto \arctan 2x + \arctan x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution α.

2. Déterminer α en utilisant la formule d'addition de la tangente.

Correction de l'exercice 11. 1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ comme arctan. On calcule:

$$f'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} + \frac{1}{1+x^2} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$, qui est un intervalle car f est continue. On calcule les limites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

et de même

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-\pi}{2} + \frac{-\pi}{2} = -\pi.$$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $[-\pi, \pi]$. Puisque $\pi/4 \in [-\pi, \pi]$, il existe donc un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = \pi/4$. On remarque que $\alpha > 0$ car $f(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$, par propriété de arctan.

2. La formule d'addition pour tan est

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \qquad a, b, a+b \notin \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Comme $\tan \circ \arctan = \mathrm{Id}$ (voir la correction de l'exercice 2), on a donc

$$\tan(\arctan(2x) + \arctan(x)) = \frac{3x}{1-2x^2},$$

et en $x = \alpha$ cela donne

$$\frac{3\alpha}{1-2\alpha^2} = 1.$$

On sait déjà que $\alpha > 0$, et donc α est la solution positive de l'équation polynômiale de degré 2:

$$2\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{1}{4}\big(-3 + \sqrt{17}\big) \simeq \frac{1}{4}.$$

Exercice 12. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arccos(1-2x^2)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et préciser en quels points f est continue.
2. Dériver f en prenant soin d'étudier l'ensemble où f est dérivable.
3. Dresser le tableau de variations de f et tracer son graphe.
4. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f.

Correction de l'exercice 12. 1. La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$. On cherche donc l'image réciproque de $[-1, 1]$ par la fonction $x \to 1 - 2x^2$, qui est une parabole. On observe

$$-1 \leq 1 - 2x^2 \leq 1 \iff x^2 \leq 1 \iff x \in [-1, 1]. \tag{18}$$

Donc f est définie sur $[-1, 1]$. La fonction $x \to 1 - 2x^2$ est polynômiale donc continue sur $[-1, 1]$, à valeurs dans $[-1, 1]$. La fonction arccos est continue sur $[-1, 1]$. Donc f est continue en tant que composée de fonctions continues.

2. La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$. En reprenant (18), on voit que

$$-1 < 1 - 2x^2 < 1 \iff x \in]-1, 0[\cup]0, 1[,$$

donc f est dérivable sur $]-1, 1[\setminus\{0\}$, en tant que composée d'applications dérivables (la parabole $x \to 1-2x^2$ est polynômiale donc dérivable). On calcule:

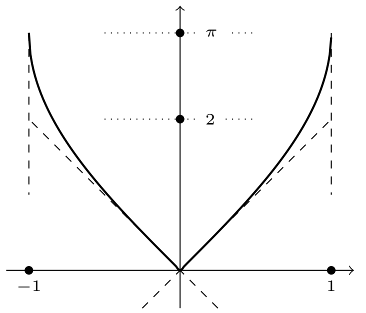
$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} \cdot (-4x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 4x^4}} = \frac{4x}{|2x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in]-1, 0[\cup]0, 1[. \tag{19}$$

3. Sur $[-1, 0[$, on voit que $f' < 0$, car $|x| = -x$ sur cet intervalle. Donc f est décroissante strictement sur $]-1, 0[$, et de manière symétrique f est croissante strictement sur $]0, 1[$.
On a $f(-1) = f(1) = \arccos(-1) = \pi$, et $f(0) = \arccos(1) = 0$. Par ailleurs,

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = -2,$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2,$$



4. On reprend (19):

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Donc par intégration sur l'intervalle $]-1, 0[$, il existe une constante $c_- \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = 2\arccos(x) + c_-, \qquad -1 < x < 0,$$

et symétriquement une constante $c_+ \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = 2\arcsin(x) + c_+, \qquad 0 < x < 1.$$

On trouve les constantes c_- et c_+ par exemple en prenant les limites en -1 et 1 :

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = \pi = 2\arccos(-1) + c_- = 2\pi + c_-, \quad \text{donc } c_- = -\pi.$$

Donc

$$f(x) = 2\arccos(x) - \pi, \quad -1 < x < 0,$$

et

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = \pi = 2\arcsin(1) + c_+ = \pi + c_+, \quad \text{donc } c_+ = 0,$$

et donc

$$f(x) = 2\arcsin(x), \quad 0 < x < 1.$$