Correction de la feuille 6 : Fonctions circulaires réciproques

Exercice 1. 1. Montrer que $0 < \arccos \dfrac{3}{4} < \dfrac{\pi}{4}$

2. Résoudre $\arccos x = 2 \arccos \dfrac{3}{4}$

Correction de l'exercice 1. (1) La fonction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est strictement décroissante. Donc sa réciproque arccos est strictement décroissante. Comme $\sqrt{2} \simeq 1.41$, on a $\sqrt{2} \leq 3/2$, et donc $\sqrt{2}/2 < 3/4$, si bien que

$$\arccos(3/4) < \arccos(\sqrt{2}/2),$$

et comme $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et que $\pi/4 \in [0, \pi]$, on a $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$. Donc

$$\arccos(3/4) < \pi/4.$$

Noter que $\cos(\pi/4 + 2\pi) = \sqrt{2}/2$ mais comme $\pi/4 + 2\pi \notin [0, \pi]$, on n'a pas $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4 + 2\pi$. Les exercices 2 et 3 reviennent sur ce point.
Par ailleurs, $3/4 < 1$, donc $\arccos(1) = 0 < \arccos(3/4)$.

(2) On applique cos aux deux membres de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ pour trouver

$$\cos(\arccos(x)) = \cos(2 \arccos(3/4).$$

On utilise ensuite

$$\cos(\arccos(x)) = x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

L'égalité (1) vient de la *définition* de arccos en tant que réciproque de $\cos_{|[0,\pi]}$, la restriction de cos à $[0, \pi]$. En effet, arccos est définie comme une fonction de $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, \pi]$, si bien que

$$\cos \circ \arccos = \left(\cos_{|[0,\pi]}\right) \circ \arccos = \mathrm{Id}_{|[-1,1]}, \tag{2}$$

où $\mathrm{Id}_{|[-1,1]}$ est la fonction identité: $x \to x$, en restriction à $[-1, 1]$. Donc on obtient

$$x = \cos(2 \arccos(3/4)),$$

qui est une réponse tout à fait acceptable. On peut la simplifier, en utilisant une formule de trigonométrie:

$$\cos(2z) = 2\cos(z)^2 - 1, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Cela donne

$$x = 2\cos(\arccos(3/4))^2 - 1 = 2 \cdot (3/4)^2 - 1.$$

Exercice 2. Calculer $\arcsin(\sin a)$, $\arccos(\cos a)$, $\arctan(\tan a)$, $\arccos(\sin a)$ pour $a \in \left\{\dfrac{61\pi}{5}, \dfrac{76\pi}{5}, \dfrac{83\pi}{5}\right\}$.

Correction de l'exercice 2. Le point crucial est le suivant:

$$\arcsin \circ \sin \neq \mathrm{Id}, \tag{3}$$

où Id est la fonction $x \to x$ définie sur $\mathbb{R}$. En effet, arcsin n'est *pas* la réciproque de sin, qui n'est pas injective, mais la réciproque de la restriction de sin à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ (qui est injective).
Par définition de arcsin :

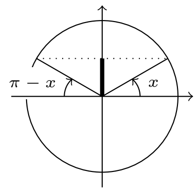
$$\forall\, x \in [-\pi/2, \pi/2] : \qquad \arcsin \circ \sin(x) = \arcsin \circ \sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}(x) = x. \tag{4}$$

Soit maintenant $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Alors $x - \pi \in [-\pi/2, \pi/2]$, donc d'après (4):

$$\arcsin(\sin(x - \pi)) = x - \pi.$$

On fait maintenant le lien entre $\sin(x)$ et $\sin(x - \pi)$: d'abord on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x) = \sin(\pi - x) \tag{5}$$



Et donc par imparité de sin,

$$\sin(x - \pi) = -\sin(x).$$

La fonction arcsin est aussi impaire, si bien que

$$\forall\, x \in [\pi/2, 3\pi/2], \quad \arcsin(\sin(x)) = -\arcsin(\sin(x - \pi)) = \pi - x. \tag{6}$$

Avec (4) et (6) on connait maintenant la fonction arcsin(sin) sur un intervalle de longueur 2π, et donc on la connait partout, car sin est 2π-périodique (noter que arcsin n'est *pas* périodique: elle est définie seulement sur $[-1, 1]$).
Précisément: soit $x \in \mathbb{R}$. Pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$x \in [-\pi/2 + k\pi, -\pi/2 + (k + 1)\pi[. \tag{7}$$

L'entier k est unique et est bien sûr une fonction de x. On peut préciser la valeur de k :

$$-\pi/2 + k\pi \leq x < -\pi/2 + (k + 1)\pi$$

est équivalent à

$$k \leq \frac{x + \pi/2}{\pi} < k + 1,$$

et donc

$$k = [\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}], \tag{8}$$

en notant $[y]$ la partie entière du nombre réel y. Soit donc $x \in \mathbb{R}$ et k défini par (8):

- Si k est pair, alors $\sin(x) = \sin(x - k\pi)$, et comme $x - k\pi$ appartient à $[-\pi/2, \pi/2[$, on a, par (4),

$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(x - k\pi) = x - k\pi.$$

- Si k est impair, alors $k-1$ est pair est donc $\sin(x-k\pi) = \sin(x-(k-1)\pi)-\pi) = \sin(x-\pi) = -\sin(x)$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = -\arcsin(\sin(x - k\pi)) = k\pi - x.$$

Finalement,

$$\arcsin(\sin(x)) = \begin{cases} x - k\pi, & \text{si } k \text{ défini par (8) est pair,} \\ k\pi - x, & \text{si } k \text{ défini par (8) est impair,} \end{cases}$$

ce qu'on peut résumer en

$$\arcsin(\sin(x)) = (-1)^k (x - k\pi), \qquad k \text{ défini par (8)}, \tag{9}$$

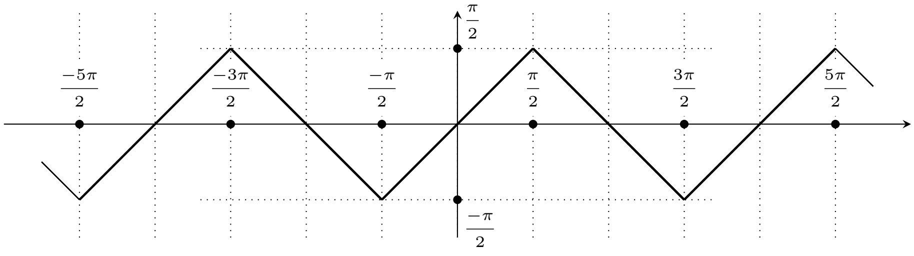


Figure 1: Le graphe de la fonction $x \to \arcsin(\sin(x))$.

et avec (8) on a la formule (pas particulièrement utile sous cette forme)

$$\arcsin(\sin(x)) = (-1)^{[x/\pi+1/2]}(x - \pi[x/\pi + \frac{1}{2}]). \tag{10}$$

Avec la formule (9), la question posée est maintenant très simple. On calcule: $61 = 12 \cdot 5 + 1$, si bien que $61/5 = 12 + 1/5$, et donc $61\pi/5 = 12\pi + \pi/5$. On applique la formule (9) avec $x = 61\pi/5$, et $k = 12$. Cela donne

$$\arcsin(\sin(61\pi/5)) = \pi/5.$$

Si maintenant $x = 76\pi/5$, on observe que $76/5 = 75/5 + 1/5 = 15 + 1/5$, et on applique la formule (9) avec $x = 76\pi/5$ et $k = 15$. Comme k est impair cela donne

$$\arcsin(\sin(76\pi/5)) = -\pi/5.$$

Le calcul pour $83\pi/5$ est bien sûr similaire.
Pour arccos, un raisonnement similaire aboutit à une formule analogue à (9), qui permet de calculer facilement les valeurs de arccos(cos) aux points donnés dans l'énoncé. Mais on peut calculer les valeurs demandées sans trouver une expression générale pour arccos(cos) :

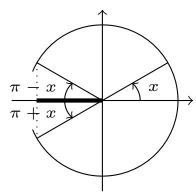
$$\arccos(\cos(61\pi/5)) = \arccos(12\pi + \pi/5)) = \arccos(\cos(\pi/5)) = \pi/5,$$

la dernière égalité puisque arccos est la réciproque de la restriction de cos à $[0, \pi]$, et $\pi/5 \in [0, \pi]$. Ensuite

$$\begin{aligned} \arccos(\cos(76/\pi/5)) = \arccos(\cos(14\pi + \pi + \pi/5)) &= \arccos(\cos(\pi + \pi/5)) \\ &= \arccos(\cos(\pi - \pi/5)) \\ &= \pi - \pi/5. \end{aligned} \tag{11}$$

L'avant-dernière égalité dans (11) vient de

$$\cos(\pi + x) = \cos(\pi - x), \qquad x \in \mathbb{R}$$



La dernière égalité dans (11) vient du fait que $\pi - \pi/5 \in [0, \pi]$.
On a $83\pi/5 = 16\pi + 3\pi/5$, et donc

$$\arccos(\cos(83\pi/5)) = \arccos(\cos(3\pi/5)) = 3\pi/5.$$

Le raisonnement pour arctan(tan) est similaire, et en fait plus simple car la restriction de tan à une période est bijective, contrairement à cos et sin. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, si on considère à nouveau k défini par (7), ou ce qui revient au même par (8), on a

$$\arctan(\tan(x)) = \arctan(\tan(x - k\pi)) = x - k\pi,$$

la dernière égalité car $x - k\pi$ appartient à $]-\pi/2, \pi/2[$, par définition de k. Donc on a la formule

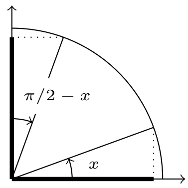
$$\arctan(\tan(x)) = x - \pi\Big[\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}\Big], \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}. \tag{12}$$

En particulier,

$$\arctan(\tan(61\pi/5)) = \arctan(\tan(12\pi + \pi/5)) = \pi/5,$$
$$\arctan(\tan(76\pi/5)) = \arctan(\tan(15\pi + \pi/5)) = \pi/5,$$
$$\arctan(\tan(83\pi/5)) = \arctan(\tan(16\pi + 3\pi/5)) = 3\pi/5.$$

On cherche maintenant la valeur de $x = \arccos(\sin(61\pi/5)) = \arccos(\sin(\pi/5))$. On a donc $x \in [0, \pi]$, et $\cos(x) = \sin(\pi/5)$. On peut utiliser la formule de trigonométrie

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$



qui donne

$$\sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi/5), \qquad x \in [0, \pi]. \tag{13}$$

Quand x parcourt $[0, \pi]$, $y = \pi/2 - x$ parcourt $[-\pi/2, \pi/2]$. La fonction sin est injective sur $[-\pi/2, \pi/2]$, et donc de (13), on déduit $\pi/2 - x = \pi/5$, et donc $x = \pi/2 - \pi/5$.

On cherche maintenant à calculer $x = \arccos(\sin(76\pi/5)) = \arccos(\sin(\pi + \pi/5))$, c'est-à-dire qu'on cherche à résoudre l'équation

$$\cos(x) = \sin(\pi + \pi/5), \quad x \in [0, \pi].$$

En utilisant la formule ci-dessus, cela revient à

$$\sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi + \pi/5), \quad x \in [0, \pi].$$

Le problème ici est que $\pi + \pi/5$ n'appartient pas à $[0, \pi]$. On peut s'y ramener en utilisant la formule (5):

$$\sin(\pi/2 - x) = \sin(\pi + \pi/5) = \sin(-\pi/5), \quad x \in [0, \pi].$$

On a vu plus haut que $\pi/2 - x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Comme on a $-\pi/5 \in [-\pi/2, \pi/2]$ et que sin est injective sur cet intervalle, cela donne $\pi/2 - x = -\pi/5$, et donc $x = \pi/2 + \pi/5$.

Exercice 3. Que vaut $\arccos(\cos x)$ si $x \in [6\pi, 7\pi]$ puis si $x \in [25\pi, 26\pi]$?

Exercice 4. Votre calculatrice affirme que l'argument de $z = -3 + 4i$ est $-\arctan\frac{4}{3} + \pi$ ou $\arctan\frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}$. Ces deux valeurs sont-elles cohérentes?

Correction de l'exercice 4. À partir de

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

on déduit

$$\left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 0, \qquad x \neq 0. \tag{14}$$

En effet, en explicitant les dérivées on trouve

$$\frac{1}{1 + x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Donc la fonction dans le membre de gauche de (14) est constante **sur $\mathbb{R}_-$, et par ailleurs aussi sur $\mathbb{R}_+$. La version précédente de cette correction affirmait que de (14), on pouvait déduire le fait que la fonction $x \to \arctan(x) + \arctan(1/x)$ est constante, ce qui n'est pas vrai car l'égalité (14) est valable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, qui n'est pas un intervalle.** On trouve la constante dans $\mathbb{R}_+$ en évaluant par exemple en $x = 1$: alors $\arctan(1) = \arctan(1/1) = \pi/4$ car $\tan(\pi/4) = 1$. On a donc

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2, \qquad x > 0.$$

On trouve la constante dans $\mathbb{R}_-$ par exemple en prenant la limite $x \to -\infty$. On obtient

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = -\pi/2, \qquad x < 0.$$

En revenant à l'énoncé, on peut maintenant répondre: oui, ces deux valeurs sont égales, du fait de (14).

Exercice 5. L'application $\cos : [2\pi, 3\pi] \to [-1, 1]$ est-elle bijective ? Si oui, donner une expression de sa fonction réciproque.

Exercice 6. Représenter graphiquement sans l'aide de la calculatrice la fonction $x \mapsto \arcsin(\sin x)$.

Pour la correction de l'exercice 6: voir la correction de l'exercice 2.

Exercice 7. Simplifier les expressions $\tan(\arcsin x)$, $\cos(\arctan x)$ après avoir donné leur ensemble de définition.

Exercice 8. On pose $f : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^-$.
2. Déterminer le ou les points de la courbe d'ordonnée nulle et préciser la tangente en ce ou ces points.
3. Etudier la fonction.

Exercice 9. Simplifier les expressions $\arccos x + \arcsin x$ et $\arccos x + \arccos(-x)$ après avoir donné leur ensemble de définition. On pourra dériver.

Exercice 10. Soit x, y des réels tels que $xy \neq 1$. Simplifier $\arctan \dfrac{x+y}{1-xy} - \arctan x - \arctan y$. On pourra dériver.

Exercice 11. On cherche à résoudre l'équation (E): $\arctan 2x + \arctan x = \dfrac{\pi}{4}$.

1. Démontrer que $f : x \mapsto \arctan 2x + \arctan x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution α.
2. Déterminer α en utilisant la formule d'addition de la tangente.

Exercice 12. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et préciser en quels points f est continue.
2. Dériver f en prenant soin d'étudier l'ensemble où f est dérivable.
3. Dresser le tableau de variations de f et tracer son graphe.
4. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f.