Fiche 4 - Suites de variables aléatoires

1 - Convergence de suites de variables aléatoires

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées selon la loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour tout $n \geq 2$,

$$Z_n = \frac{X_n}{\ln n}.$$

1. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 2}$ converge en probabilité vers 0.
2. Est-ce que $(Z_n)_{n\geq 2}$ converge dans L^1?
3. Est-ce que $(Z_n)_{n\geq 2}$ converge dans L^2?

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$P(X_n = 0) = 1 - \tfrac{1}{n} \quad \text{et} \quad P(X_n = n) = \tfrac{1}{n}.$$

1. Étudier la convergence en probabilité de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Étudier la convergence dans L^2 de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Étudier la convergence dans L^1 de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \geq 1$, X_n suive une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose, pour tout $n \geq 1$,

$$Y_n = \tfrac{X_n}{n}$$

Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi et déterminer sa loi limite.

Exercice 4. *Méthode de Monte-Carlo*
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Que peut-on dire de

$$\frac{f(U_1) + \ldots + f(U_n)}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0,1]$. Pour une constante c, on définit :

$$N = \min\{k \in \mathbb{N} / X_k > c\}$$

(avec éventuellement $N = +\infty$ si l'ensemble considéré est vide).
Est-ce que N est indépendant de X_N?

2 - Théorème central limite

Exercice 6. Une personne a l'habitude d'acheter le journal en kiosque qui coûte $1,50$ euros par numéro. Chaque jour de l'année elle l'achète avec une probabilité $p = 0,5$.

1. Exprimer la probabilité que cette personne soit contrôlée entre 170 et 190 fois.
2. En utilisant une table pour la loi normale, donner une valeur approchée pour cette probabilité.
3. Cette personne préfère acheter le journal en kiosque plutôt que de prendre un abonnement car cela lui permet de l'acheter tôt le matin plutôt que d'avoir à attendre le passage du facteur. Elle serait néanmoins prête à souscrire à un abonnement si celui-ci était suffisamment bon marché pour que, chaque année, elle ait 90% de chance d'être gagnante par rapport au fait de l'acheter en kiosque.

Exercice 7. On souhaite tester un dé à six faces afin de savoir s'il est truqué. On s'intéresse en particulier à l'apparition du 6. Notons p la probabilité d'obtenir 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers et l'on pose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient 6 au } i\text{-ème lancer} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont supposées indépendantes.

1. Donner la loi de la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus.
2. Exprimer F_n la fréquence d'apparition du 6 en fonction de $X_1, \ldots, X_n$, puis calculer son espérance et sa variance.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchechychev, donner pour un dé non truqué un nombre de lancers permettant d'affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus $0,01$.

4. On suppose le dé non truqué. En appliquant le théorème central limite, donner une valeur approchée de $P(|F_n - 1/6| \leq 0,01)$ en fonction de n.

5. Reprendre la question 3 en remplaçant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev par l'approximation si dessus.

3 - Chaînes de Markov

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\{1,2,3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

où $p \in [0,1]$.

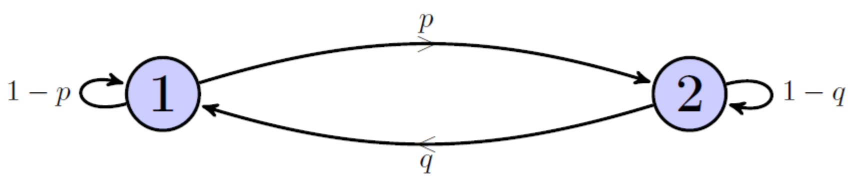
1. Dessiner le graphe de cette chaîne de Markov.

2. Calculer $P(X_1 = 1|X_0 = 1)$, $P(X_2 = 1|X_0 = 1)$, $P(X_3 = 1|X_0 = 1)$, $P(X_4 = 1|X_0 = 1)$, $P(X_1 = 2|X_0 = 2)$, $P(X_2 = 2|X_0 = 2)$ et $P(X_3 = 2|X_0 = 2)$.

3. Quelle est la loi de X_1 si X_0 suit une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$.

4. On suppose que X_0 a pour loi $(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$. Calculer $P(X_1 = 2 \text{ et } X_2 = 3)$ et $P(X_1 = 2 \text{ et } X_3 = 2)$.

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à deux états dont le graphe est



On suppose $(p,q) \in]0,1[^2$.

1. Écrire la matrice de transition Q de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Justifier que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible et montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une probabilité π qui ne dépend pas de la probabilité initiale μ_0.

   Dans la suite on note $\mu_n = (p_n, 1-p_n)$ la loi de X_n.

3. Donner une relation entre p_n et p_{n-1} (pour $n \in \mathbb{N}^*$)/

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = (1-p-q)\alpha + q$.

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n en fonction de n et retrouver la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer π.

6. Justifier que $(Q^n)_n$ converge et déterminer sa limite.

7. Application : Dans un ordinateur, on s'intéresse à la diode qui indique une lecture du disque dur. Toutes les millisecondes, elle peut changer d'état. On observe que:
- quand elle est éteinte, elle a deux chances sur cinq de s'allumer.
- quand elle est allumée, elle a une chance sur quatre de s'éteindre.
Sur une longue période, dans quelle proportion est-elle allumée?

Exercice 10. Au cours d'un entrainement de football, Anna, Bruno et Carole se font des passes. Anna fait toujours la passe à Carole; Carole fait la passe aux deux autres avec la même probabilité; Bruno donne le ballon une fois sur trois à Anna, deux fois sur trois à Carole. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$X_n = \begin{cases} \text{A} & \text{si Anna a le ballon après } n \text{ lancers;} \\ \text{B} & \text{si Bruno a le ballon après } n \text{ lancers;} \\ \text{C} & \text{si Carole a le ballon après } n \text{ lancers.} \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de probabilité associé à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. et écrire sa matrice de transition T.

2. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = (a_n, b_n, c_n)$ la loi de X_n.
Exprimer μ_{n+1} en fonction de μ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On suppose que Anna a le ballon au début de l'entrainement. Pour chacun des joueurs, calculer la probabilité d'avoir le ballon après deux lancers.

4. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique probabilité invariante μ_∞ et la calculer.

5. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers μ_∞.

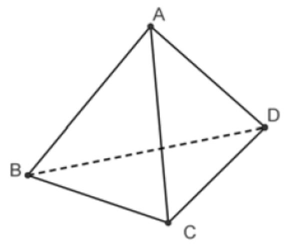
Exercice 11. *Marche aléatoire sur Z*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'espace d'états $\mathbb{Z}$ et de matrice de transition $\mathcal{P} = (p_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ avec :

$$p_{i,j} = \begin{cases} p, & \text{si } j = i+1 \\ 1-p, & \text{si } j = i-1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où p est un nombre fixé tel que $0 < p < 1$.

1. Dessiner le graphe de probabilité associé à cette chaîne de Markov.
2. Calculer $P(X_n = 0|X_0 = 0)$ en distinguant les cas n pairs et n impairs.
3. En déduire que 0 est récurrent.
Indication : On pourra utiliser l'équivalent de Stirling.

Exercice 12. Une particule se déplace aléatoirement d'un sommet à l'autre d'un tétraèdre $ABCD$.



Lorsqu'elle se trouve sur un sommet, elle se déplace sur un des trois autres sommets avec la même probabilité. On suppose que les sommets A, B, C, D sont numérotés respectivement 1, 2, 3, 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le sommet où se trouve la particule après n déplacements; $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

1. Donner la matrice de transition Q de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer Q^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible et apériodique.
4. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter ce résultat.
5. On suppose que la particule quitte le sommet A et on note Z le nombre d'étapes pour qu'elle y revienne pour la première fois. - Calculer $P(Z = 1)$ et $P(Z = 2)$.
- Calculer $P(Z = n)$ pour $n \geq 2$.

Exercice 13. *Exemple d'une chaîne de Markov non apériodique : le modèle d'Ehrenfest à deux jetons*
On considère deux urnes A et$B$ et deux jetons numérotés 1 et 2. On tire le numéro 1 ou 2 au hasard de manière equiprobable et indépendante et on change d'urne le jeton correspondant. Au départ, les deux jetons sont dans l'urne A. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n le nombre de jetons dans l'urne A.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, quelles sont les valeurs prises par X_n?

2. Soit $k \in \{1, 2\}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_{n+1} = k|X_n = k)$, $P(X_{n+1} = k + 1|X_n = k)$ et $P(X_{n+1} = k - 1|X_n = k)$. Que peut-on en déduire sur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Donner la matrice de transition Q associée à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Calculer Q^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5. $(X_n)_n$ est-elle irréductible? apériodique?

6. Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, quel est le nombre moyen de jetons dans l'urne A au bout de n étapes?

8. On note T la variable aléatoire qui compte le nombre d'étapes pour revenir à l'état initial pour la première fois (c'est-à-dire avec deux jetons dans A). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P\{T = n\}$.

9. Montrer que $P\{T < +\infty\} = 1$.

10. Calculer l'espérance de T.
    Indication: En la démontrant, on pourra utiliser l'égalité suivante : pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^{k-1}} = 4 - \frac{N+2}{2^{N-1}}$.