Combinatoire, Probabilités et Statistiques

Feuille d'exercices 2 : Calcul de probabilités

1 Quelques exercices théoriques

Exercice 1 Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un ensemble Ω et deux événements A et B. On suppose que $\mathbb{P}(A \cup B) = 7/8$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$, $\mathbb{P}(A) = 3/8$. Calculer $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$ et $\mathbb{P}(B \cap \overline{A})$.

Exercice 2 Soit une expérience aléatoire modélisée par un univers Ω et une probabilité $\mathbb{P}$. Soient A, B et C trois événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0.7$, $\mathbb{P}(B) = 0.2$ et $\mathbb{P}(C) = 0.3$. De plus, A et B sont indépendants, et B et C sont incompatibles.

1. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(B \cup C)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(B|\overline{C})$.
4. Quelle est la probabilité pour que, à la fois, B et C soient réalisés ?
5. Quelle est la probabilité pour que les trois événements aient lieu en même temps.

Exercice 3 Egalité d'inclusion-exclusion Soient A et B deux événements d'un espace Ω. Montrer que : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Exercice 4 Soient A, B et C trois événements deux à deux indépendants et tels que $\mathbb{P}(C) > 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, B et C pour que A et B soient indépendants relativement à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot|C)$.

2 Problèmes de probabilités

Dans les exercices qui suivent, sauf mention contraire, l'univers est muni de la probabilité uniforme.

Exercice 5 Un nouveau vaccin a été testé sur 12500 personnes; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation. Parmi les 12500 personnes testées, 680 personnes sont des femmes enceintes.

1. Quelle est la probabilité pour une femme enceinte d'avoir une réaction secondaire si elle reçoit un vaccin?
2. Quelle est la probabilité pour une personne non enceinte d'avoir une réaction secondaire?

Exercice 6 Dans une promotion de n étudiants, quelle est la probabilité de l'événement suivant : "Deux étudiants au moins sont nés le même jour?".

Exercice 7 On tire simultanément et au hasard 13 cartes dans un jeu de 52 cartes. Calculer que parmi ces 13 cartes, il y ait :

1. exactement un roi;
2. au moins un roi.

Exercice 8 Paradoxe du chevalier de Méré (1607-1684)

1. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois 1 en lançant 4 dés équilibrés.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois un double 1 en lançant 24 fois deux dés équilibrés.

Exercice 9 Soit $n \geq 2$ un entier. Sur un parking de n places alignées, $n-2$ voitures se garent au hasard. Quelle est la probabilité que deux places libres se trouvent côte à côte.

Exercice 10 Paradoxe de Monty-Hall. Supposez que vous êtes sur le plateau d'un jeu télévisé, face à trois portes et que vous devez choisir d'en ouvrir une seule, en sachant que derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière les deux autres des chèvres (votre objectif est de découvrir la voiture). Vous choisissez une porte, et le présentateur, qui sait, lui, ce qu'il y a derrière chaque porte, ouvre une porte derrière laquelle se cache une chèvre (le jeu lui impose de toujours démasquer une chèvre lors de ce premier tour du jeu). Le présentateur se tourne vers vous et vous laisse le choix : soit vous changez de porte, soit vous conservez votre choix initial. Que faites-vous?

Exercice 11 Deux joueurs jouent à pile ou face avec une pièce bien équilibrée. Montrer que les trois événements suivants sont deux à deux indépendants mais qu'ils ne sont pas indépendants dans leur ensemble :

1. A : "La pièce du premier joueur tombe sur pile";
2. B : "La pièce du second joueur tombe sur face";
3. C : "Les deux pièces tombent du même côté".

Exercice 12 Dans un cours de danse, il y a 40 personnes : 20 femmes et 20 hommes. On demande aux danseurs et aux danseuses de former des couples au hasard, sans forcément que ces couples soient mixtes.

1. Quelle est la probabilité qu'aucun des vingt couples formés ne soient mixtes?
2. Quelle est la probabilité que tous les couples soient mixtes?

Exercice 13 Trois personnes lancent successivement et à tour de rôle un dé à six faces. La partie s'arrête lorsque l'une des personnes gagne en obtenant un six.

1. Pour tout entier $r \geq 1$, calculer la probabilité que la partie s'arrête au r-ème lancer.
2. On suppose que r est de la forme $r = 3k$. Calculer la probabilité qu'entre le premier et le r-ème lancer, la personne qui a commencé la partie gagne le jeu.
3. En déduire la probabilité que la personne qui a commencé gagne le jeu.
4. Calculer de même la probabilité que les autres personnes ont de gagner.