Fiche 4

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ est la suivante

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. On considère le produit ${}^tTT$. Que peut-on dire a priori sur les valeurs propres et les espaces propres de ${}^tTT$?
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de ${}^tTT$. On désigne cette base par $\mathcal{B}$ et par P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}. Diagonaliser ${}^tTT$.
3. Trouver alors S - la matrice symétrique définie positive, telle que $S^2 = {}^tTT$.
4. Quelle est la matrice de rotation R telle que $RS = T$? Pourquoi c'est une rotation ?

Exercice 2. Donner la décomposition polaire des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit A une matrice symétrique réelle. On suppose qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $A^k = I$ (où I désigne la matrice identité).

1. Montrer que $A^2 = I$ puis que A est orthogonale.
2. Que peut-on dire d'un endomorphisme d'un espace euclidien dont la matrice est A dans une base orthonormée ?

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

Exercice 5. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A énumérées avec multiplicité. Montrer l'identité $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$.

Exercice 6. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ qui diagonalise $u^\star \circ u$.
2. Montrer que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est orthogonale.
3. On suppose dans cette question que u est bijectif. Montrer que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthogonale de E puis déterminer une base orthonormée de E.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe deux matrices U et V orthogonales telles que UMV est diagonale.
   Indication : on pensera à utiliser la formule de changement de bases (pour des bases différentes au départ ainsi qu'à l'arrivée).
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible.
   (a) On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique. La famille trouvée à la question 2 est-elle une base ?
   (b) Construire à l'aide de cette famille une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(u) \oplus (\mathrm{Im}(u))^\perp$.
   (c) Montrer que le résultat de la question 4 est encore vrai.